

Analyse: van \mathbb{R} naar \mathbb{R}^n hoorcollege

Metrische ruimten (10)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam



Afstandsbegrip

Metriek

Zij S een verzameling en $d: S \times S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ een functie die voldoet aan

- 1 $d(x, x) = 0$ voor alle $x \in S$ en $d(x, y) > 0$ als $x \neq y$ in S .
- 2 $d(x, y) = d(y, x)$ voor alle $x, y \in S$.
- 3 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ voor alle $x, y, z \in S$ (**driehoeksongelijkheid**).

Dan noemen we d een **metriek** op S . De combinatie (S, d) noemen we een **metrische ruimte**.

Tot nu toe hebben we altijd gewerkt met $S = \mathbb{R}$ en $d(x, y) = |x - y|$. We kunnen echter ook $S = \mathbb{R}^2$ bekijken waar we voor $\vec{x} = (x_1, x_2)$ en $\vec{y} = (y_1, y_2)$ definiëren

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

de **Euclidische metriek**: afstand in het vlak. Merk op dat $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$, waar $\|\cdot\|$ de Euclidische norm op \mathbb{R}^2 is. Meer algemeen kunnen we op \mathbb{R}^k definiëren

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2}.$$

Voorbeelden van metrieken op \mathbb{R}^n

Metriek

Zij S een verzameling en $d: S \times S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ een functie die voldoet aan

- 1 $d(x, x) = 0$ voor alle $x \in S$ en $d(x, y) > 0$ als $x \neq y$ in S .
- 2 $d(x, y) = d(y, x)$ voor alle $x, y \in S$.
- 3 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ voor alle $x, y, z \in S$ (**driehoeksongelijkheid**).

Dan noemen we d een **metriek** op S . De combinatie (S, d) noemen we een **metrische ruimte**.

Bekijk $S = \mathbb{R}^k$. Voor de hand liggende metrieken:

$$d_2(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2}, \quad d_1(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{j=1}^k |x_j - y_j|, \quad d_\infty(\vec{x}, \vec{y}) = \max_{1 \leq j \leq k} |x_j - y_j|.$$

Een veel flauwere metriek is de **discrete metriek**:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} 1 & \text{als } \vec{x} \neq \vec{y} \\ 0 & \text{als } \vec{x} = \vec{y}. \end{cases}$$

Metrieken en convergentie: terminologie

Zij (S, d) een metrische ruimte en (s_n) een rij in S .

- We zeggen dat (s_n) **convergeert** naar $s \in S$ als $\lim_{n \rightarrow \infty} d(s_n, s) = 0$. Oftewel:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat } d(s_n, s) < \epsilon \quad \text{als } n > N.$$

- Evenzo zeggen we dat (s_n) **Cauchy** is als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat } d(s_n, s_m) < \epsilon \quad \text{als } n, m > N.$$

- We noemen (S, d) **volledig** (Engels: complete) als elke Cauchyrij in S convergeert naar een element van S .

Bekend: \mathbb{R} met $d(x, y) = |x - y|$ is volledig. De rationale getallen \mathbb{Q} met dezelfde metriek zijn echter niet volledig.

Claim: \mathbb{R}^k is volledig met de Euclidische metriek.

Volledigheid van \mathbb{R}^k

We bekijken \mathbb{R}^k met de Euclidische metriek $d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $(\vec{x}^{(n)})$ in \mathbb{R}^k convergeert desda voor elke $j \in \{1, \dots, k\}$ de rij $(x_j^{(n)})$ convergeert.

Een rij $(\vec{x}^{(n)})$ in \mathbb{R}^k is Cauchy desda voor elke $j \in \{1, \dots, k\}$ de rij $(x_j^{(n)})$ Cauchy is.

We bewijzen de tweede bewering. Merk op dat voor elke j geldt

$$|x_j - y_j| \leq d(\vec{x}, \vec{y}) \leq \sqrt{k} \max_{1 \leq j \leq k} |x_j - y_j|.$$

1 Stel dat $(\vec{x}^{(n)})$ Cauchy is in \mathbb{R}^k . Als $d(\vec{x}^{(n)}, \vec{x}^{(m)}) < \epsilon$, dan geldt ook voor elke j dat $|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| < \epsilon$. Dus de rij $(x_j^{(n)})$ is voor elke j Cauchy in \mathbb{R} .

2 Stel nu dat $(x_j^{(n)})$ Cauchy is voor elke j en zij $\epsilon > 0$.

- Er bestaat voor elke j een N_j zodat $|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| < \epsilon$ als $n, m > N_j$.
- Neem nu $N = \max(N_1, \dots, N_k)$. Voor $n, m > N$ geldt

$$d(\vec{x}^{(n)}, \vec{x}^{(m)}) \leq \sqrt{k} \max_{1 \leq j \leq k} |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| < \sqrt{k} \cdot \epsilon.$$

- Dus is $(\vec{x}^{(n)})$ Cauchy.

Volledigheid van \mathbb{R}^k

We bekijken \mathbb{R}^k met de Euclidische metriek $d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $(\vec{x}^{(n)})$ in \mathbb{R}^k convergeert desda voor elke $j \in \{1, \dots, k\}$ de rij $(x_j^{(n)})$ convergeert.

Een rij $(\vec{x}^{(n)})$ in \mathbb{R}^k is Cauchy desda voor elke $j \in \{1, \dots, k\}$ de rij $(x_j^{(n)})$ Cauchy is.

Stelling 13.4

De ruimte \mathbb{R}^k is volledig: elke Cauchyrij heeft een limiet.

Bewijs:

- Zij $(\vec{x}^{(n)})$ een Cauchyrij in \mathbb{R}^k .
- Dan is $(x_j^{(n)})$ een Cauchyrij in \mathbb{R} voor alle j (lemma).
- Omdat \mathbb{R} volledig is, geldt voor elke j dat $x_j^{(n)} \rightarrow x_j$ voor zekere $x_j \in \mathbb{R}$.
- Dus convergeert $(\vec{x}^{(n)})$ in \mathbb{R}^k (lemma).

Bolzano-Weierstrass in \mathbb{R}^k

Herinnering: stelling van Bolzano-Weierstrass (11.5)

Iedere begrensde rij in \mathbb{R} heeft een convergente deelrij.

We noemen een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}^k$ **begrensd** als er een $M > 0$ bestaat zodat $\max_{1 \leq j \leq k} |x_j| \leq M$ voor alle $\vec{x} \in S$.

Stelling van Bolzano-Weierstrass (13.5)

Iedere begrensde rij in \mathbb{R}^k heeft een convergente deelrij.

Bewijs: zij $(\vec{x}^{(n)})$ een begrensde rij in \mathbb{R}^n .

- Voor elke j is $(x_j^{(n)})$ begrensd.
- We kunnen dus $(\vec{x}^{(n)})$ vervangen door een deelrij zodat $(x_1^{(n)})$ convergeert.
- We kunnen vervolgens $(\vec{x}^{(n)})$ vervangen door een deelrij zodat $(x_2^{(n)})$ convergeert.
- Dan convergeert $(x_1^{(n)})$ nog steeds.
- Na k keer herhalen krijgen we een deelrij zodat $(x_j^{(n)})$ convergeert voor elke j .
- Een toepassing van het lemma geeft dat de deelrij convergeert in \mathbb{R}^k .