OPGAVEN BIJ ANALYSE 2016, METRISCHE RUIMTEN (10)

Limieten van rijen

Definitie (Convergentie)**.** Zij (S,d) een metrische ruimte en (s_n) een rij in S. We zeggen dat s_n *convergeert* naar $s \in S$ (notatie: $s_n \to s$) als $\lim_{n\to\infty} d(s_n,s) = 0$, oftewel

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad d(s_n,s) < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N.$$

Merk op: voor $S = \mathbb{R}$ en $d(x,y) := |x-y|$ is dit de gebruikelijke definitie van convergentie.

Opgave 1. We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2}$.

(a) Bewijs dat voor alle $j \in \{1,\dots,k\}$ geldt $|x_j - y_j| \le d(\vec{x},\vec{y})$.

(b) Bewijs dat als een rij $\left(\vec{x}^{(n)}\right)_{n=1}^\infty = \left(\vec{x}^{(1)},\vec{x}^{(2)},\dots\right)$ van vectoren in $\mathbb{R}^k$ convergeert, dan dat ook voor elke $j \in \{1,\dots,k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)_{n=1}^\infty = \left(x_j^{(1)},x_j^{(2)},\dots\right)$ van j-de entries convergeert.

(c) Toon aan dat geldt $d(\vec{x},\vec{y}) \le \sqrt{k}\max_j |x_j - y_j|$.

(d) Bewijs dat als voor elke $j \in \{1,\dots,k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert, dat dan ook de rij $\left(x^{(n)}\right)$ convergeert.

Opgave 2. Zij $\left(\vec{x}^{(n)}\right)$ en $\left(\vec{y}^{(n)}\right)$ rijen in $\mathbb{R}^k$. Stel dat $\vec{x}^{(n)} \to \vec{x}$ en $\vec{y}^{(n)} \to \vec{y}$ voor zekere $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^k$. Bewijs dat $\vec{x}^{(n)} + \vec{y}^{(n)} \to \vec{x} + \vec{y}$.

Open en gesloten

Herinner: we noemen $F \subseteq \mathbb{R}$ gesloten als F alle limieten van rijen in F bevat: voor elke rij (x_n) die geheel in F ligt en convergeert (in $\mathbb{R}$), geldt dat de limiet in F ligt.

Opgave 3.

(a) Bewijs dat een "gesloten" interval $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ gesloten is volgens deze definitie.

(b) Laat zien dat een open interval $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ niet gesloten is.

(c) Is $\mathbb{R}$ gesloten? En $\varnothing$?

Definitie (Open)**.** We noemen een verzameling $E \subseteq \mathbb{R}$ *open* als voor elke $x \in E$ er een $\delta > 0$ is zodat $(x-\delta, x+\delta) \subset E$.

Opgave 4.

(a) Bewijs dat een "open" interval $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ open is volgens deze definitie.

(b) Laat zien dat een gesloten interval $[a,b]$ niet open is.

(c) Is $\mathbb{R}$ open? En $\varnothing$?

Opgave 5. Is een "halfopen" interval $[a,b)$ open? Gesloten?

Opgave 6. Bewijs dat als $E \subseteq \mathbb{R}$ open is, dat dan het complement $F := \mathbb{R} \setminus E$ gesloten is. *Hint*: neem een rij (x_n) in F en stel $x_n \to x$ voor zekere $x \notin F$.

Opgave 7. Bewijs dat als F gesloten is, dat dan het complement $E := \mathbb{R} \setminus F$ open is.