Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

Metrische ruimten (11)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

Open verzamelingen

Zij (S, d) een metrische ruimte en $s_0 \in S$.

- De open bol met straal r om s_0 is

$$B(s_0, r) := \{s \in S : d(s_0, s) < r\}.$$

- Als $E \subseteq S$ en $s_0 \in E$, dan noemen we s_0 een inwendig punt van E als er een $r > 0$ bestaat zodat $B(s_0, r) \subseteq E$.
- We schrijven E° voor de verzameling van inwendige punten in E: het inwendige. We noemen E open in S als elk punt van E inwendig is, dus als $E = E^\circ$.

Eigenschappen van open verzamelingen:

1. S en $\varnothing$ zijn open in S.
2. De vereniging van een willekeurige collectie open verzamelingen is weer open.
3. De doorsnede van eindig veel open verzamelingen is weer open.

Gesloten verzamelingen

Zij (S, d) een metrische ruimte.

- We noemen $U \subseteq S$ open als voor elke $s_0 \in U$ er een $r > 0$ is zodat $B(s_0, r) \subseteq U$.
- We noemen $F \subseteq S$ gesloten als het complement $S \setminus F$ open is.
- Voor een willekeurige $E \subseteq S$ definiëren we de afsluiting E^- van E als de doorsnede van alle gesloten F zodat $E \subseteq F$. De afsluiting is "de kleinste gesloten verzameling die E bevat".
- De rand ∂E van E is de verzameling $E^- \setminus E^\circ$.

Eigenschappen van gesloten verzamelingen:

1. S en $\varnothing$ zijn gesloten in S.
2. De doorsnede van elke collectie gesloten verzamelingen is weer gesloten.
3. De vereniging van eindig veel gesloten verzamelingen is weer gesloten.

Voorbeelden

Zij (S, d) een metrische ruimte.

- Als $E \subseteq S$ dan is het inwendige E° de verzameling van alle $s_0 \in E$ waarvoor er $r > 0$ bestaat zodat $B(s_0, r) \subseteq E$.
- We noemen $U \subseteq S$ open als voor elke $s_0 \in U$ er een $r > 0$ is zodat $B(s_0, r) \subseteq U$.
- We noemen $F \subseteq S$ gesloten als het complement $S \setminus F$ open is.
- Voor een willekeurige $E \subseteq S$ definiëren we de afsluiting E^- van E als de doorsnede van alle gesloten F zodat $E \subseteq F$. De afsluiting is "de kleinste gesloten verzameling die E bevat".

Merk op: in $\mathbb{R}$ is $B(s_0, r)$ het interval $(s_0 - r, s_0 + r)$. Bekijk

E	type	E°	E^-
$(0,1)$	open	$(0,1)$	$[0,1]$
$[0,1]$	gesloten	$(0,1)$	$[0,1]$
$[0,1)$		$(0,1)$	$[0,1]$
$\mathbb{R}$	open en gesloten	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\varnothing$	open en gesloten	$\varnothing$	$\varnothing$
$[0,1) \cup (1,2]$		$(0,1) \cup (1,2)$	$[0,2]$

Gesloten en afsluiting

Propositie 13.9

Zij E een deelverzameling van een metrische ruimte (S, d). Dan

1. E is gesloten desda $E = E^-$
2. E is gesloten desda voor elke rij in E die convergeert, de limiet in E ligt
3. $s \in E^-$ desda er een rij (s_n) in E is met $s_n \to s$
4. $s \in \partial E$ desda $s \in E^-$ en $s \in (S \setminus E)^-$

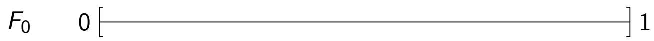
We bewijzen 2, "$\Rightarrow$": Zij E gesloten en laat $x_n \to s_0$ een convergente rij in E.

- Stel dat $s_0 \notin E$, dus $s_0 \in S \setminus E$.
- $S \setminus E$ is open, dus er is $r > 0$ zodat $B(s_0, r) \subset S \setminus E$.
- Dan $d(y, s_0) > r$ voor $y \in E$, dus $d(x_n, s_0) > r$ voor alle n.
- Tegenspraak: $x_n \to s_0$, dus $d(x_n, s_0) \to 0$.

"$\Leftarrow$": Stel E bevat de limiet van iedere convergente rij in E.

- Stel $S \setminus E$ is niet open. Dan is er $s_0 \in S \setminus E$ zodat voor alle $r > 0$ geldt $B(s_0, r) \not\subset S \setminus E$, oftewel $B(s_0, r) \cap E \neq \varnothing$.
- Voor $n \in \mathbb{N}$, neem $x_n \in B(s_0, 1/n) \cap E$.
- $d(x_n, s_0) \to 0 \quad \Rightarrow \quad x_n \to s_0 \quad \Rightarrow \quad s_0 \in E$. Tegenspraak!

De Cantorverzameling



Deel het in drieën en haal het (open) middelste stuk weg:

Doe nu hetzelfde op de twee stukken:

En herhalen:

Neem nu de "limiet" $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Merk op:

- Iedere F_n is gesloten, dus F ook.
- F_n bestaat uit 2^n intervallen van lengte $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Totaal: $\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
- F heeft totale lengte $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.
- Het inwendige F° van F is leeg.
- F is overaftelbaar.

Doorsnedes van gesloten verzamelingen

Stelling 13.10

Zij (F_n) een rij gesloten begrensde niet-lege verzamelingen in $\mathbb{R}^k$ met $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$. Dan is $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ ook begrensd, gesloten en niet-leeg.

Bewijs: gesloten en begrensd is ok. Te bewijzen: niet-leeg.

- Kies $\vec{\mathbf{x}}_n \in F_n$ willekeurig en bekijk de rij $(\vec{\mathbf{x}}_n)$.
- Volgens Bolzano-Weierstrass heeft de rij een convergente deelrij $\vec{\mathbf{x}}_{n_\ell} \to \vec{\mathbf{x}}_0$.
- Kies nu n vast. Voor alle $\ell \geq n$ geldt $n_\ell \geq n$ en dus $\vec{\mathbf{x}}_{n_\ell} \in F_{n_\ell} \subseteq F_n$.
- Dus de rij $(\vec{\mathbf{x}}_{n_\ell})_{\ell=n}^{\infty}$ ligt geheel in F_n en $\vec{\mathbf{x}}_{n_\ell} \to \vec{\mathbf{x}}_0$.
- Vanwege geslotenheid van F_n geldt $\vec{\mathbf{x}}_{n_0} \in F_n$.
- Dit geldt voor alle voldoende grote n, dus $\vec{\mathbf{x}}_{n_0} \in F$.

Compactheid

Zij (S, d) een metrische ruimte en $E \subseteq S$.

- Een collectie $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ heet een open overdekking van E als $E \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$.
- Een deeloverdekking van $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ is een deelcollectie die nog steeds E overdekt.
- Een (deel)overdekking heet eindig als deze uit eindig veel verzamelingen bestaat.
- We noemen E compact als elke overdekking van E een eindige deeloverdekking heeft.

Merk op: het interval $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ is niet compact.

Stelling van Heine-Borel (13.12)

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda E gesloten en begrensd is.