# Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

## Heine-Borel (12)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

# Compactheid van intervallen

## Propositie 13.13

Een interval $F = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ is compact.

# Compactheid van intervallen

## Propositie 13.13

Een interval $F = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is.

# Compactheid van intervallen

## Propositie 13.13

Een interval $F = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = b - a$ voor de lengte.

# Compactheid van intervallen

## Propositie 13.13

Een interval $F = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = b - a$ voor de lengte.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.

# Compactheid van intervallen

## Propositie 13.13

Een interval $F = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = b - a$ voor de lengte.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu $F$ in twee gesloten intervallen van lengte $\ell/2$.

# Compactheid van intervallen

## Propositie 13.13

Een interval $F = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = b - a$ voor de lengte.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu $F$ in twee gesloten intervallen van lengte $\ell/2$.
- Minstens één van deze intervallen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden

# Compactheid van intervallen

## Propositie 13.13

Een interval $F = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = b - a$ voor de lengte.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu $F$ in twee gesloten intervallen van lengte $\ell/2$.
- Minstens één van deze intervallen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden, zeg $F_1$.

# Compactheid van intervallen

## Propositie 13.13

Een interval $F = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = b - a$ voor de lengte.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu $F$ in twee gesloten intervallen van lengte $\ell/2$.
- Minstens één van deze intervallen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden, zeg $F_1$.
- Hak $F_1$ weer op in twee intervallen van lengte $\ell/4$.

# Compactheid van intervallen

## Propositie 13.13

Een interval $F = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = b - a$ voor de lengte.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu $F$ in twee gesloten intervallen van lengte $\ell/2$.
- Minstens één van deze intervallen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden, zeg $F_1$.
- Hak $F_1$ weer op in twee intervallen van lengte $\ell/4$. We vinden $F_2 \subseteq F_1$ die niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.

# Compactheid van intervallen

## Propositie 13.13

Een interval $F = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = b - a$ voor de lengte.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu $F$ in twee gesloten intervallen van lengte $\ell/2$.
- Minstens één van deze intervallen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden, zeg $F_1$.
- Hak $F_1$ weer op in twee intervallen van lengte $\ell/4$. We vinden $F_2 \subseteq F_1$ die niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Zo vinden we een rij intervallen $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$

# Compactheid van intervallen

## Propositie 13.13

Een interval $F = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = b - a$ voor de lengte.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu $F$ in twee gesloten intervallen van lengte $\ell/2$.
- Minstens één van deze intervallen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden, zeg $F_1$.
- Hak $F_1$ weer op in twee intervallen van lengte $\ell/4$. We vinden $F_2 \subseteq F_1$ die niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Zo vinden we een rij intervallen $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ waar elke $F_n$ lengte $\ell/2^n$ heeft

# Compactheid van intervallen

**Propositie 13.13**

Een interval $F = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = b - a$ voor de lengte.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu $F$ in twee gesloten intervallen van lengte $\ell/2$.
- Minstens één van deze intervallen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden, zeg $F_1$.
- Hak $F_1$ weer op in twee intervallen van lengte $\ell/4$. We vinden $F_2 \subseteq F_1$ die niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Zo vinden we een rij intervallen $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ waar elke $F_n$ lengte $\ell/2^n$ heeft en niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.

# Compactheid van intervallen

## Propositie 13.13

Een interval $F = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = b - a$ voor de lengte.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu $F$ in twee gesloten intervallen van lengte $\ell/2$.
- Minstens één van deze intervallen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden, zeg $F_1$.
- Hak $F_1$ weer op in twee intervallen van lengte $\ell/4$. We vinden $F_2 \subseteq F_1$ die niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Zo vinden we een rij intervallen $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ waar elke $F_n$ lengte $\ell/2^n$ heeft en niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Kies $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$

# Compactheid van intervallen

## Propositie 13.13

Een interval $F = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = b - a$ voor de lengte.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu $F$ in twee gesloten intervallen van lengte $\ell/2$.
- Minstens één van deze intervallen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden, zeg $F_1$.
- Hak $F_1$ weer op in twee intervallen van lengte $\ell/4$. We vinden $F_2 \subseteq F_1$ die niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Zo vinden we een rij intervallen $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ waar elke $F_n$ lengte $\ell/2^n$ heeft en niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Kies $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq F$.

# Compactheid van intervallen

## Propositie 13.13

Een interval $F = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = b - a$ voor de lengte.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu $F$ in twee gesloten intervallen van lengte $\ell/2$.
- Minstens één van deze intervallen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden, zeg $F_1$.
- Hak $F_1$ weer op in twee intervallen van lengte $\ell/4$. We vinden $F_2 \subseteq F_1$ die niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Zo vinden we een rij intervallen $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ waar elke $F_n$ lengte $\ell/2^n$ heeft en niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Kies $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq F$. Dan is er $U_0 \in \mathcal{U}$ zodat $x_0 \in U_0$.

# Compactheid van intervallen

### Propositie 13.13

Een interval $F = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = b - a$ voor de lengte.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu $F$ in twee gesloten intervallen van lengte $\ell/2$.
- Minstens één van deze intervallen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden, zeg $F_1$.
- Hak $F_1$ weer op in twee intervallen van lengte $\ell/4$. We vinden $F_2 \subseteq F_1$ die niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Zo vinden we een rij intervallen $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ waar elke $F_n$ lengte $\ell/2^n$ heeft en niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Kies $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq F$. Dan is er $U_0 \in \mathcal{U}$ zodat $x_0 \in U_0$.
- Omdat $U_0$ open is

# Compactheid van intervallen

## Propositie 13.13

Een interval $F = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = b - a$ voor de lengte.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu $F$ in twee gesloten intervallen van lengte $\ell/2$.
- Minstens één van deze intervallen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden, zeg $F_1$.
- Hak $F_1$ weer op in twee intervallen van lengte $\ell/4$. We vinden $F_2 \subseteq F_1$ die niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Zo vinden we een rij intervallen $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ waar elke $F_n$ lengte $\ell/2^n$ heeft en niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Kies $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq F$. Dan is er $U_0 \in \mathcal{U}$ zodat $x_0 \in U_0$.
- Omdat $U_0$ open is, bestaat er $r > 0$ zodat $B(x_0, r) \subseteq U_0$.

# Compactheid van intervallen

## Propositie 13.13

Een interval $F = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = b - a$ voor de lengte.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu $F$ in twee gesloten intervallen van lengte $\ell/2$.
- Minstens één van deze intervallen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden, zeg $F_1$.
- Hak $F_1$ weer op in twee intervallen van lengte $\ell/4$. We vinden $F_2 \subseteq F_1$ die niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Zo vinden we een rij intervallen $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ waar elke $F_n$ lengte $\ell/2^n$ heeft en niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Kies $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq F$. Dan is er $U_0 \in \mathcal{U}$ zodat $x_0 \in U_0$.
- Omdat $U_0$ open is, bestaat er $r > 0$ zodat $B(x_0, r) \subseteq U_0$.
- Maar dan geldt voor voldoende grote $n$ dat $\ell/2^n < r$

# Compactheid van intervallen

## Propositie 13.13

Een interval $F = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = b - a$ voor de lengte.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu $F$ in twee gesloten intervallen van lengte $\ell/2$.
- Minstens één van deze intervallen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden, zeg $F_1$.
- Hak $F_1$ weer op in twee intervallen van lengte $\ell/4$. We vinden $F_2 \subseteq F_1$ die niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Zo vinden we een rij intervallen $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ waar elke $F_n$ lengte $\ell/2^n$ heeft en niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Kies $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq F$. Dan is er $U_0 \in \mathcal{U}$ zodat $x_0 \in U_0$.
- Omdat $U_0$ open is, bestaat er $r > 0$ zodat $B(x_0, r) \subseteq U_0$.
- Maar dan geldt voor voldoende grote $n$ dat $\ell/2^n < r$ en dus $F_n \subseteq U_0$.

# Compactheid van intervallen

## Propositie 13.13

Een interval $F = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = b - a$ voor de lengte.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu $F$ in twee gesloten intervallen van lengte $\ell/2$.
- Minstens één van deze intervallen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden, zeg $F_1$.
- Hak $F_1$ weer op in twee intervallen van lengte $\ell/4$. We vinden $F_2 \subseteq F_1$ die niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Zo vinden we een rij intervallen $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ waar elke $F_n$ lengte $\ell/2^n$ heeft en niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Kies $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq F$. Dan is er $U_0 \in \mathcal{U}$ zodat $x_0 \in U_0$.
- Omdat $U_0$ open is, bestaat er $r > 0$ zodat $B(x_0, r) \subseteq U_0$.
- Maar dan geldt voor voldoende grote $n$ dat $\ell/2^n < r$ en dus $F_n \subseteq U_0$.
- Tegenspraak, want $F_n$ kon niet met eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden.

# Compactheid van $k$-cellen

**Propositie 13.13**

Een $k$-cel $F = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact.

# Compactheid van $k$-cellen

**Propositie 13.13**

Een $k$-cel $F = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = b - a$ voor de lengte.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu $F$ in twee gesloten intervallen van lengte $\ell/2$.
- Minstens één van deze intervallen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden, zeg $F_1$.
- Hak $F_1$ weer op in twee intervallen van lengte $\ell/4$. We vinden $F_2 \subseteq F_1$ die niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Zo vinden we een rij intervallen $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ waar elke $F_n$ lengte $\ell/2^n$ heeft en niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Kies $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq F$. Dan is er $U_0 \in \mathcal{U}$ zodat $x_0 \in U_0$.
- Omdat $U_0$ open is, bestaat er $r > 0$ zodat $B(x_0, r) \subseteq U_0$.
- Maar dan geldt voor voldoende grote $n$ dat $\ell/2^n < r$ en dus $F_n \subseteq U_0$.
- Tegenspraak, want $F_n$ kon niet met eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden.

# Compactheid van $k$-cellen

## Propositie 13.13

Een $k$-cel $F = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = \sqrt{\sum_{j=1}^{k}(b_j - a_j)^2}$ voor de diameter.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu $F$ in twee gesloten intervallen van lengte $\ell/2$.
- Minstens één van deze intervallen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden, zeg $F_1$.
- Hak $F_1$ weer op in twee intervallen van lengte $\ell/4$. We vinden $F_2 \subseteq F_1$ die niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Zo vinden we een rij intervallen $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ waar elke $F_n$ lengte $\ell/2^n$ heeft en niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Kies $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq F$. Dan is er $U_0 \in \mathcal{U}$ zodat $x_0 \in U_0$.
- Omdat $U_0$ open is, bestaat er $r > 0$ zodat $B(x_0, r) \subseteq U_0$.
- Maar dan geldt voor voldoende grote $n$ dat $\ell/2^n < r$ en dus $F_n \subseteq U_0$.
- Tegenspraak, want $F_n$ kon niet met eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden.

# Compactheid van $k$-cellen

## Propositie 13.13

Een $k$-cel $F = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (b_j - a_j)^2}$ voor de diameter.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu $F$ in $2^k$ gesloten $k$-cellen van diameter $\ell/2$.
- Minstens één van deze intervallen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden, zeg $F_1$.
- Hak $F_1$ weer op in twee intervallen van lengte $\ell/4$. We vinden $F_2 \subseteq F_1$ die niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Zo vinden we een rij intervallen $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ waar elke $F_n$ lengte $\ell/2^n$ heeft en niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Kies $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq F$. Dan is er $U_0 \in \mathcal{U}$ zodat $x_0 \in U_0$.
- Omdat $U_0$ open is, bestaat er $r > 0$ zodat $B(x_0, r) \subseteq U_0$.
- Maar dan geldt voor voldoende grote $n$ dat $\ell/2^n < r$ en dus $F_n \subseteq U_0$.
- Tegenspraak, want $F_n$ kon niet met eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden.

# Compactheid van $k$-cellen

## Propositie 13.13

Een $k$-cel $F = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = \sqrt{\sum_{j=1}^{k}(b_j - a_j)^2}$ voor de diameter.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu $F$ in $2^k$ gesloten $k$-cellen van diameter $\ell/2$.
- Minstens één van deze cellen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden, zeg $F_1$.
- Hak $F_1$ weer op in twee intervallen van lengte $\ell/4$. We vinden $F_2 \subseteq F_1$ die niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Zo vinden we een rij intervallen $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ waar elke $F_n$ lengte $\ell/2^n$ heeft en niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Kies $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq F$. Dan is er $U_0 \in \mathcal{U}$ zodat $x_0 \in U_0$.
- Omdat $U_0$ open is, bestaat er $r > 0$ zodat $B(x_0, r) \subseteq U_0$.
- Maar dan geldt voor voldoende grote $n$ dat $\ell/2^n < r$ en dus $F_n \subseteq U_0$.
- Tegenspraak, want $F_n$ kon niet met eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden.

# Compactheid van $k$-cellen

## Propositie 13.13

Een $k$-cel $F = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = \sqrt{\sum_{j=1}^{k}(b_j - a_j)^2}$ voor de diameter.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu $F$ in $2^k$ gesloten $k$-cellen van diameter $\ell/2$.
- Minstens één van deze cellen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden, zeg $F_1$.
- Hak $F_1$ weer op in $2^k$ cellen van diameter $\ell/4$. We vinden $F_2 \subseteq F_1$ die niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Zo vinden we een rij intervallen $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ waar elke $F_n$ lengte $\ell/2^n$ heeft en niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Kies $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq F$. Dan is er $U_0 \in \mathcal{U}$ zodat $x_0 \in U_0$.
- Omdat $U_0$ open is, bestaat er $r > 0$ zodat $B(x_0, r) \subseteq U_0$.
- Maar dan geldt voor voldoende grote $n$ dat $\ell/2^n < r$ en dus $F_n \subseteq U_0$.
- Tegenspraak, want $F_n$ kon niet met eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden.

# Compactheid van $k$-cellen

**Propositie 13.13**

Een $k$-cel $F = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = \sqrt{\sum_{j=1}^{k}(b_j - a_j)^2}$ voor de diameter.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu $F$ in $2^k$ gesloten $k$-cellen van diameter $\ell/2$.
- Minstens één van deze cellen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden, zeg $F_1$.
- Hak $F_1$ weer op in $2^k$ cellen van diameter $\ell/4$. We vinden $F_2 \subseteq F_1$ die niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Zo vinden we een rij cellen $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ waar elke $F_n$ diameter $\ell/2^n$ heeft en niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Kies $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq F$. Dan is er $U_0 \in \mathcal{U}$ zodat $x_0 \in U_0$.
- Omdat $U_0$ open is, bestaat er $r > 0$ zodat $B(x_0, r) \subseteq U_0$.
- Maar dan geldt voor voldoende grote $n$ dat $\ell/2^n < r$ en dus $F_n \subseteq U_0$.
- Tegenspraak, want $F_n$ kon niet met eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden.

# Compactheid van $k$-cellen

## Propositie 13.13

Een $k$-cel $F = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = \sqrt{\sum_{j=1}^{k}(b_j - a_j)^2}$ voor de diameter.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu $F$ in $2^k$ gesloten $k$-cellen van diameter $\ell/2$.
- Minstens één van deze cellen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden, zeg $F_1$.
- Hak $F_1$ weer op in $2^k$ cellen van diameter $\ell/4$. We vinden $F_2 \subseteq F_1$ die niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Zo vinden we een rij cellen $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ waar elke $F_n$ diameter $\ell/2^n$ heeft en niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Kies $\vec{\mathbf{x_0}} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq F$. Dan is er $U_0 \in \mathcal{U}$ zodat $\vec{\mathbf{x_0}} \in U_0$.
- Omdat $U_0$ open is, bestaat er $r > 0$ zodat $B(x_0, r) \subseteq U_0$.
- Maar dan geldt voor voldoende grote $n$ dat $\ell/2^n < r$ en dus $F_n \subseteq U_0$.
- Tegenspraak, want $F_n$ kon niet met eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden.

# Compactheid van $k$-cellen

## Propositie 13.13

Een $k$-cel $F = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact.

Bewijs: stel dat $F$ niet compact is. Schrijf $\ell = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (b_j - a_j)^2}$ voor de diameter.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van $F$ die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu $F$ in $2^k$ gesloten $k$-cellen van diameter $\ell/2$.
- Minstens één van deze cellen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden, zeg $F_1$.
- Hak $F_1$ weer op in $2^k$ cellen van diameter $\ell/4$. We vinden $F_2 \subseteq F_1$ die niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Zo vinden we een rij cellen $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ waar elke $F_n$ diameter $\ell/2^n$ heeft en niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Kies $\vec{\mathbf{x_0}} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq F$. Dan is er $U_0 \in \mathcal{U}$ zodat $\vec{\mathbf{x_0}} \in U_0$.
- Omdat $U_0$ open is, bestaat er $r > 0$ zodat $B(\vec{\mathbf{x_0}}, r) \subseteq U_0$.
- Maar dan geldt voor voldoende grote $n$ dat $\ell/2^n < r$ en dus $F_n \subseteq U_0$.
- Tegenspraak, want $F_n$ kon niet met eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden.

# Compactheid van gesloten verzamelingen

**Propositie 13.13**

Een $k$-cel $F = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact.

# Compactheid van gesloten verzamelingen

**Propositie 13.13**

Een $k$-cel $F = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact.

**Gevolg**

Elke gesloten en begrensde verzameling in $\mathbb{R}^k$ is compact.

# Compactheid van gesloten verzamelingen

**Propositie 13.13**

Een $k$-cel $F = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact.

**Gevolg**

Elke gesloten en begrensde verzameling in $\mathbb{R}^k$ is compact.

Bewijs:

# Compactheid van gesloten verzamelingen

**Propositie 13.13**

Een $k$-cel $F = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact.

**Gevolg**

Elke gesloten en begrensde verzameling in $\mathbb{R}^k$ is compact.

Bewijs:

**Opgave**

Een gesloten deelverzameling van een compacte verzameling is weer compact.

# Heine-Borel

**Heine-Borel (Stelling 13.12)**

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

# Heine-Borel

**Heine-Borel (Stelling 13.12)**

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$"

# Heine-Borel

## Heine-Borel (Stelling 13.12)

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat $E$ compact is.

# Heine-Borel

**Heine-Borel (Stelling 13.12)**

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat $E$ compact is.

- Begrensdheid:

# Heine-Borel

**Heine-Borel (Stelling 13.12)**

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat $E$ compact is.

- Begrensdheid: neem $\mathcal{U} = \{B(\vec{\mathbf{0}}, r) : r \in (0, \infty)\}$.

# Heine-Borel

**Heine-Borel (Stelling 13.12)**

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat $E$ compact is.

- Begrensdheid: neem $\mathcal{U} = \{B(\vec{\mathbf{0}}, r) : r \in (0, \infty)\}$. Dit is een open overdekking van $\mathbb{R}^k$

# Heine-Borel

## Heine-Borel (Stelling 13.12)

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat $E$ compact is.

- Begrensdheid: neem $\mathcal{U} = \{B(\vec{\mathbf{0}}, r) : r \in (0, \infty)\}$. Dit is een open overdekking van $\mathbb{R}^k$, dus zeker van $E$.

# Heine-Borel

## Heine-Borel (Stelling 13.12)

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat $E$ compact is.

- Begrensdheid: neem $\mathcal{U} = \{B(\vec{\mathbf{0}}, r) : r \in (0, \infty)\}$. Dit is een open overdekking van $\mathbb{R}^k$, dus zeker van $E$. Dus heeft $\mathcal{U}$ een eindige deeloverdekking.

# Heine-Borel

## Heine-Borel (Stelling 13.12)

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat $E$ compact is.

- Begrensdheid: neem $\mathcal{U} = \{B(\vec{\mathbf{0}}, r) : r \in (0, \infty)\}$. Dit is een open overdekking van $\mathbb{R}^k$, dus zeker van $E$. Dus heeft $\mathcal{U}$ een eindige deeloverdekking.
- Dan bestaan er $r_1, \ldots, r_n$ zodat $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(\vec{\mathbf{0}}, r_n)$

# Heine-Borel

## Heine-Borel (Stelling 13.12)

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat $E$ compact is.

- Begrensdheid: neem $\mathcal{U} = \{B(\vec{\mathbf{0}}, r) : r \in (0, \infty)\}$. Dit is een open overdekking van $\mathbb{R}^k$, dus zeker van $E$. Dus heeft $\mathcal{U}$ een eindige deeloverdekking.
- Dan bestaan er $r_1, \ldots, r_n$ zodat $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(\vec{\mathbf{0}}, r_n) = B\big(\vec{\mathbf{0}}, \max(r_1, \ldots, r_n)\big)$.

# Heine-Borel

## Heine-Borel (Stelling 13.12)

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat $E$ compact is.

- Begrensdheid: neem $\mathcal{U} = \{B(\vec{\mathbf{0}}, r) : r \in (0, \infty)\}$. Dit is een open overdekking van $\mathbb{R}^k$, dus zeker van $E$. Dus heeft $\mathcal{U}$ een eindige deeloverdekking.
- Dan bestaan er $r_1, \ldots, r_n$ zodat $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(\vec{\mathbf{0}}, r_n) = B\big(\vec{\mathbf{0}}, \max(r_1, \ldots, r_n)\big)$.
- Dus $E$ is begrensd.

# Heine-Borel

## Heine-Borel (Stelling 13.12)

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat $E$ compact is.

- Begrensdheid: neem $\mathcal{U} = \{B(\vec{\mathbf{0}}, r) : r \in (0, \infty)\}$. Dit is een open overdekking van $\mathbb{R}^k$, dus zeker van $E$. Dus heeft $\mathcal{U}$ een eindige deeloverdekking.
- Dan bestaan er $r_1, \ldots, r_n$ zodat $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(\vec{\mathbf{0}}, r_n) = B\big(\vec{\mathbf{0}}, \max(r_1, \ldots, r_n)\big)$.
- Dus $E$ is begrensd.

- Geslotenheid:

# Heine-Borel

## Heine-Borel (Stelling 13.12)

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat $E$ compact is.

- Begrensdheid: neem $\mathcal{U} = \{B(\vec{\mathbf{0}}, r) : r \in (0, \infty)\}$. Dit is een open overdekking van $\mathbb{R}^k$, dus zeker van $E$. Dus heeft $\mathcal{U}$ een eindige deeloverdekking.
- Dan bestaan er $r_1, \ldots, r_n$ zodat $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(\vec{\mathbf{0}}, r_n) = B\big(\vec{\mathbf{0}}, \max(r_1, \ldots, r_n)\big)$.
- Dus $E$ is begrensd.

- Geslotenheid: we moeten bewijzen dat $\mathbb{R}^k \setminus E$ open is.

# Heine-Borel

## Heine-Borel (Stelling 13.12)

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat $E$ compact is.

- Begrensdheid: neem $\mathcal{U} = \{B(\vec{\mathbf{0}}, r) : r \in (0, \infty)\}$. Dit is een open overdekking van $\mathbb{R}^k$, dus zeker van $E$. Dus heeft $\mathcal{U}$ een eindige deeloverdekking.
- Dan bestaan er $r_1, \ldots, r_n$ zodat $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(\vec{\mathbf{0}}, r_n) = B\big(\vec{\mathbf{0}}, \max(r_1, \ldots, r_n)\big)$.
- Dus $E$ is begrensd.

- Geslotenheid: we moeten bewijzen dat $\mathbb{R}^k \setminus E$ open is. Kies $\vec{\mathbf{x_0}} \in \mathbb{R}^k \setminus E$.

# Heine-Borel

## Heine-Borel (Stelling 13.12)

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat $E$ compact is.

- Begrensdheid: neem $\mathcal{U} = \{B(\vec{\mathbf{0}}, r) : r \in (0, \infty)\}$. Dit is een open overdekking van $\mathbb{R}^k$, dus zeker van $E$. Dus heeft $\mathcal{U}$ een eindige deeloverdekking.
- Dan bestaan er $r_1, \ldots, r_n$ zodat $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(\vec{\mathbf{0}}, r_n) = B\big(\vec{\mathbf{0}}, \max(r_1, \ldots, r_n)\big)$.
- Dus $E$ is begrensd.

- Geslotenheid: we moeten bewijzen dat $\mathbb{R}^k \setminus E$ open is. Kies $\vec{\mathbf{x_0}} \in \mathbb{R}^k \setminus E$.
- Neem $V_m = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^k : (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x_0}}) > 1/m\}$.

# Heine-Borel

## Heine-Borel (Stelling 13.12)

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat $E$ compact is.

- Begrensdheid: neem $\mathcal{U} = \{B(\vec{\mathbf{0}}, r) : r \in (0, \infty)\}$. Dit is een open overdekking van $\mathbb{R}^k$, dus zeker van $E$. Dus heeft $\mathcal{U}$ een eindige deeloverdekking.
- Dan bestaan er $r_1, \ldots, r_n$ zodat $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(\vec{\mathbf{0}}, r_n) = B\big(\vec{\mathbf{0}}, \max(r_1, \ldots, r_n)\big)$.
- Dus $E$ is begrensd.

- Geslotenheid: we moeten bewijzen dat $\mathbb{R}^k \setminus E$ open is. Kies $\vec{\mathbf{x_0}} \in \mathbb{R}^k \setminus E$.
- Neem $V_m = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^k : (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x_0}}) > 1/m\}$. Dan is $V_m$ open

# Heine-Borel

## Heine-Borel (Stelling 13.12)

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat $E$ compact is.

- Begrensdheid: neem $\mathcal{U} = \{B(\vec{\mathbf{0}}, r) : r \in (0, \infty)\}$. Dit is een open overdekking van $\mathbb{R}^k$, dus zeker van $E$. Dus heeft $\mathcal{U}$ een eindige deeloverdekking.
- Dan bestaan er $r_1, \ldots, r_n$ zodat $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(\vec{\mathbf{0}}, r_n) = B\big(\vec{\mathbf{0}}, \max(r_1, \ldots, r_n)\big)$.
- Dus $E$ is begrensd.

- Geslotenheid: we moeten bewijzen dat $\mathbb{R}^k \setminus E$ open is. Kies $\vec{\mathbf{x_0}} \in \mathbb{R}^k \setminus E$.
- Neem $V_m = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^k : (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x_0}}) > 1/m\}$. Dan is $V_m$ open en $\bigcup_{m=1}^\infty V_m$

# Heine-Borel

## Heine-Borel (Stelling 13.12)

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat $E$ compact is.

- Begrensdheid: neem $\mathcal{U} = \{B(\vec{\mathbf{0}}, r) : r \in (0, \infty)\}$. Dit is een open overdekking van $\mathbb{R}^k$, dus zeker van $E$. Dus heeft $\mathcal{U}$ een eindige deeloverdekking.
- Dan bestaan er $r_1, \ldots, r_n$ zodat $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(\vec{\mathbf{0}}, r_n) = B\big(\vec{\mathbf{0}}, \max(r_1, \ldots, r_n)\big)$.
- Dus $E$ is begrensd.

- Geslotenheid: we moeten bewijzen dat $\mathbb{R}^k \setminus E$ open is. Kies $\vec{\mathbf{x_0}} \in \mathbb{R}^k \setminus E$.
- Neem $V_m = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^k : (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x_0}}) > 1/m\}$. Dan is $V_m$ open en $\bigcup_{m=1}^\infty V_m = \mathbb{R}^k \setminus \{\vec{\mathbf{x_0}}\}$.

# Heine-Borel

## Heine-Borel (Stelling 13.12)

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat $E$ compact is.

- Begrensdheid: neem $\mathcal{U} = \{B(\vec{\mathbf{0}}, r) : r \in (0, \infty)\}$. Dit is een open overdekking van $\mathbb{R}^k$, dus zeker van $E$. Dus heeft $\mathcal{U}$ een eindige deeloverdekking.
- Dan bestaan er $r_1, \ldots, r_n$ zodat $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(\vec{\mathbf{0}}, r_n) = B\big(\vec{\mathbf{0}}, \max(r_1, \ldots, r_n)\big)$.
- Dus $E$ is begrensd.

- Geslotenheid: we moeten bewijzen dat $\mathbb{R}^k \setminus E$ open is. Kies $\vec{\mathbf{x_0}} \in \mathbb{R}^k \setminus E$.
- Neem $V_m = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^k : (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x_0}}) > 1/m\}$. Dan is $V_m$ open en $\bigcup_{m=1}^\infty V_m = \mathbb{R}^k \setminus \{\vec{\mathbf{x_0}}\}$.
- De $V_m$ overdekken dus $E$

# Heine-Borel

**Heine-Borel (Stelling 13.12)**

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat $E$ compact is.

- Begrensdheid: neem $\mathcal{U} = \{B(\vec{\mathbf{0}}, r) : r \in (0, \infty)\}$. Dit is een open overdekking van $\mathbb{R}^k$, dus zeker van $E$. Dus heeft $\mathcal{U}$ een eindige deeloverdekking.
- Dan bestaan er $r_1, \ldots, r_n$ zodat $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(\vec{\mathbf{0}}, r_n) = B\big(\vec{\mathbf{0}}, \max(r_1, \ldots, r_n)\big)$.
- Dus $E$ is begrensd.

- Geslotenheid: we moeten bewijzen dat $\mathbb{R}^k \setminus E$ open is. Kies $\vec{\mathbf{x_0}} \in \mathbb{R}^k \setminus E$.
- Neem $V_m = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^k : (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x_0}}) > 1/m\}$. Dan is $V_m$ open en $\bigcup_{m=1}^\infty V_m = \mathbb{R}^k \setminus \{\vec{\mathbf{x_0}}\}$.
- De $V_m$ overdekken dus $E$, dus er is $N$ zodat $E \subseteq \bigcup_{m=1}^N V_m$

### Heine-Borel (Stelling 13.12)

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat $E$ compact is.

- Begrensdheid: neem $\mathcal{U} = \{B(\vec{\mathbf{0}}, r) : r \in (0, \infty)\}$. Dit is een open overdekking van $\mathbb{R}^k$, dus zeker van $E$. Dus heeft $\mathcal{U}$ een eindige deeloverdekking.
- Dan bestaan er $r_1, \ldots, r_n$ zodat $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(\vec{\mathbf{0}}, r_n) = B\big(\vec{\mathbf{0}}, \max(r_1, \ldots, r_n)\big)$.
- Dus $E$ is begrensd.

- Geslotenheid: we moeten bewijzen dat $\mathbb{R}^k \setminus E$ open is. Kies $\vec{\mathbf{x_0}} \in \mathbb{R}^k \setminus E$.
- Neem $V_m = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^k : (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x_0}}) > 1/m\}$. Dan is $V_m$ open en $\bigcup_{m=1}^\infty V_m = \mathbb{R}^k \setminus \{\vec{\mathbf{x_0}}\}$.
- De $V_m$ overdekken dus $E$, dus er is $N$ zodat $E \subseteq \bigcup_{m=1}^N V_m = V_N$.

# Heine-Borel

## Heine-Borel (Stelling 13.12)

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat $E$ compact is.

- Begrensdheid: neem $\mathcal{U} = \{B(\vec{\mathbf{0}}, r) : r \in (0, \infty)\}$. Dit is een open overdekking van $\mathbb{R}^k$, dus zeker van $E$. Dus heeft $\mathcal{U}$ een eindige deeloverdekking.
- Dan bestaan er $r_1, \ldots, r_n$ zodat $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(\vec{\mathbf{0}}, r_n) = B\big(\vec{\mathbf{0}}, \max(r_1, \ldots, r_n)\big)$.
- Dus $E$ is begrensd.

- Geslotenheid: we moeten bewijzen dat $\mathbb{R}^k \setminus E$ open is. Kies $\vec{\mathbf{x_0}} \in \mathbb{R}^k \setminus E$.
- Neem $V_m = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^k : (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x_0}}) > 1/m\}$. Dan is $V_m$ open en $\bigcup_{m=1}^\infty V_m = \mathbb{R}^k \setminus \{\vec{\mathbf{x_0}}\}$.
- De $V_m$ overdekken dus $E$, dus er is $N$ zodat $E \subseteq \bigcup_{m=1}^N V_m = V_N$.
- Dan geldt $\mathbb{R}^k \setminus E \supseteq \mathbb{R}^k \setminus V_N$

# Heine-Borel

## Heine-Borel (Stelling 13.12)

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat $E$ compact is.

- Begrensdheid: neem $\mathcal{U} = \{B(\vec{\mathbf{0}}, r) : r \in (0, \infty)\}$. Dit is een open overdekking van $\mathbb{R}^k$, dus zeker van $E$. Dus heeft $\mathcal{U}$ een eindige deeloverdekking.
- Dan bestaan er $r_1, \ldots, r_n$ zodat $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(\vec{\mathbf{0}}, r_n) = B\big(\vec{\mathbf{0}}, \max(r_1, \ldots, r_n)\big)$.
- Dus $E$ is begrensd.

- Geslotenheid: we moeten bewijzen dat $\mathbb{R}^k \setminus E$ open is. Kies $\vec{\mathbf{x_0}} \in \mathbb{R}^k \setminus E$.
- Neem $V_m = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^k : (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x_0}}) > 1/m\}$. Dan is $V_m$ open en $\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m = \mathbb{R}^k \setminus \{\vec{\mathbf{x_0}}\}$.
- De $V_m$ overdekken dus $E$, dus er is $N$ zodat $E \subseteq \bigcup_{m=1}^{N} V_m = V_N$.
- Dan geldt $\mathbb{R}^k \setminus E \supseteq \mathbb{R}^k \setminus V_N = B(\vec{\mathbf{x_0}}, 1/N)^-$.

# Heine-Borel

## Heine-Borel (Stelling 13.12)

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat $E$ compact is.

- Begrensdheid: neem $\mathcal{U} = \{B(\vec{\mathbf{0}}, r) : r \in (0, \infty)\}$. Dit is een open overdekking van $\mathbb{R}^k$, dus zeker van $E$. Dus heeft $\mathcal{U}$ een eindige deeloverdekking.
- Dan bestaan er $r_1, \ldots, r_n$ zodat $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(\vec{\mathbf{0}}, r_n) = B\big(\vec{\mathbf{0}}, \max(r_1, \ldots, r_n)\big)$.
- Dus $E$ is begrensd.

- Geslotenheid: we moeten bewijzen dat $\mathbb{R}^k \setminus E$ open is. Kies $\vec{\mathbf{x_0}} \in \mathbb{R}^k \setminus E$.
- Neem $V_m = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^k : (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x_0}}) > 1/m\}$. Dan is $V_m$ open en $\bigcup_{m=1}^\infty V_m = \mathbb{R}^k \setminus \{\vec{\mathbf{x_0}}\}$.
- De $V_m$ overdekken dus $E$, dus er is $N$ zodat $E \subseteq \bigcup_{m=1}^N V_m = V_N$.
- Dan geldt $\mathbb{R}^k \setminus E \supseteq \mathbb{R}^k \setminus V_N = B(\vec{\mathbf{x_0}}, 1/N)^-$.
- In het bijzonder geldt $B(\vec{\mathbf{x_0}}, 1/N) \subseteq \mathbb{R}^k \setminus E$

# Heine-Borel

## Heine-Borel (Stelling 13.12)

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat $E$ compact is.

- Begrensdheid: neem $\mathcal{U} = \{B(\vec{\mathbf{0}}, r) : r \in (0, \infty)\}$. Dit is een open overdekking van $\mathbb{R}^k$, dus zeker van $E$. Dus heeft $\mathcal{U}$ een eindige deeloverdekking.
- Dan bestaan er $r_1, \ldots, r_n$ zodat $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(\vec{\mathbf{0}}, r_n) = B\big(\vec{\mathbf{0}}, \max(r_1, \ldots, r_n)\big)$.
- Dus $E$ is begrensd.

- Geslotenheid: we moeten bewijzen dat $\mathbb{R}^k \setminus E$ open is. Kies $\vec{\mathbf{x_0}} \in \mathbb{R}^k \setminus E$.
- Neem $V_m = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^k : (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x_0}}) > 1/m\}$. Dan is $V_m$ open en $\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m = \mathbb{R}^k \setminus \{\vec{\mathbf{x_0}}\}$.
- De $V_m$ overdekken dus $E$, dus er is $N$ zodat $E \subseteq \bigcup_{m=1}^{N} V_m = V_N$.
- Dan geldt $\mathbb{R}^k \setminus E \supseteq \mathbb{R}^k \setminus V_N = B(\vec{\mathbf{x_0}}, 1/N)^-$.
- In het bijzonder geldt $B(\vec{\mathbf{x_0}}, 1/N) \subseteq \mathbb{R}^k \setminus E$, dus $\vec{\mathbf{x_0}}$ is inwendig in $\mathbb{R}^k \setminus E$.

# Heine-Borel

**Heine-Borel (Stelling 13.12)**

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda $E$ gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat $E$ compact is.

- Begrensdheid: neem $\mathcal{U} = \{B(\vec{\mathbf{0}}, r) : r \in (0, \infty)\}$. Dit is een open overdekking van $\mathbb{R}^k$, dus zeker van $E$. Dus heeft $\mathcal{U}$ een eindige deeloverdekking.
- Dan bestaan er $r_1, \ldots, r_n$ zodat $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(\vec{\mathbf{0}}, r_n) = B\big(\vec{\mathbf{0}}, \max(r_1, \ldots, r_n)\big)$.
- Dus $E$ is begrensd.

- Geslotenheid: we moeten bewijzen dat $\mathbb{R}^k \setminus E$ open is. Kies $\vec{\mathbf{x_0}} \in \mathbb{R}^k \setminus E$.
- Neem $V_m = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^k : (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x_0}}) > 1/m\}$. Dan is $V_m$ open en $\bigcup_{m=1}^\infty V_m = \mathbb{R}^k \setminus \{\vec{\mathbf{x_0}}\}$.
- De $V_m$ overdekken dus $E$, dus er is $N$ zodat $E \subseteq \bigcup_{m=1}^N V_m = V_N$.
- Dan geldt $\mathbb{R}^k \setminus E \supseteq \mathbb{R}^k \setminus V_N = B(\vec{\mathbf{x_0}}, 1/N)^-$.
- In het bijzonder geldt $B(\vec{\mathbf{x_0}}, 1/N) \subseteq \mathbb{R}^k \setminus E$, dus $\vec{\mathbf{x_0}}$ is inwendig in $\mathbb{R}^k \setminus E$.
- Dit geldt voor willekeurige $\vec{\mathbf{x_0}}$, dus $\mathbb{R}^k \setminus E$ is open.