

Analyse: van \mathbb{R} naar \mathbb{R}^n hoorcollege

Continue functies in metrische ruimtes (13)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam



Continuïteit van componenten

Stelling (c.f. 21.2)

Zij (S, d) een metrische ruimte en $f_1, \dots, f_k: S \rightarrow \mathbb{R}$ afbeeldingen. Definieer $f: S \rightarrow \mathbb{R}^k$ door $f(s) = (f_1(s), \dots, f_k(s))$. Dan is f continu desda alle f_j dat zijn.

" \Rightarrow ": volgt uit continuïteit van projecties en samenstellingen: $f_j = \pi_j \circ f$.

" \Leftarrow ": neem $s_0 \in S$ en laat $\epsilon > 0$.

- Elke f_j is continu in s_0 , dus er bestaat voor elke j een δ_j zodat $|f_j(s) - f_j(s_0)| < \epsilon$ als $d(s, s_0) < \delta_j$.
- Definieer $\delta := \min(\delta_1, \dots, \delta_k)$.
- Als $d(s, s_0) < \delta$, dan geldt

$$d(f(s), f(s_0)) = \sqrt{\sum_{j=1}^k |f_j(s) - f_j(s_0)|^2} < \sqrt{\sum_{j=1}^k \epsilon^2} = \sqrt{k} \epsilon.$$

- We zien dat f continu is in s_0 .

Continuïteit in metrische ruimtes

Definitie 21.1

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimtes en $f: S \rightarrow S^*$ een functie. We noemen f **continu** in $s_0 \in S$ als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{zodat} \quad d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d^*(f(s), f(s_0)) < \epsilon.$$

De gebruikelijke resultaten voor continue functies gelden:

- als f, g continu, dan is $f \circ g$ ook continu,
- als $f, g: S \rightarrow \mathbb{R}$ continu, dan zijn $f + g$ en $f \cdot g$ ook continu.

Bekijk $S = \mathbb{R}^k$ en de projectie $\pi_j: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $\pi_j(\vec{x}) = x_j$. Dan is π_j continu:

$$d(\pi_j(\vec{x}), \pi_j(\vec{x}^0)) = |x_j - x_j^0| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^k |x_j - x_j^0|^2} = d(\vec{x}, \vec{x}^0).$$

Dus $\delta = \epsilon$ voldoet in de definitie. Hieruit volgt continuïteit van bijvoorbeeld

$$\begin{array}{ll} f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} & g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto xyz & (x, y) \mapsto e^{x+y} \cos x \end{array}$$

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f: S \rightarrow S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

" \Leftarrow ": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U . Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B(f(s_0), \epsilon)$. Dan is U open en $s_0 \in f^{-1}(U)$.
- $f^{-1}(U)$ is open, dus er is $\delta > 0$ zodat $B(s_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$.
- Nu:
 $d(s, s_0) < \delta \Rightarrow s \in B(s_0, \delta) \Rightarrow f(s) \in U \Rightarrow d^*(f(s), f(s_0)) < \epsilon$.

" \Rightarrow ": stel dat f continu is. Zij $U \subseteq S^*$ open en neem $s_0 \in f^{-1}(U)$.

- Omdat U open is en $f(s_0) \in U$, bestaat er $\epsilon > 0$ zodat $B(f(s_0), \epsilon) \subseteq U$.
- Er bestaat $\delta > 0$ zodat $d^*(f(s), f(s_0)) < \epsilon$ als $d(s, s_0) < \delta$.
- Nu: $s \in B(s_0, \delta) \Rightarrow d^*(f(s), f(s_0)) < \epsilon \Rightarrow f(s) \in B(f(s_0), \epsilon) \subseteq U$,
- Dus $s \in f^{-1}(U)$ voor elke $s \in B(s_0, \delta)$.
- We zien $B(s_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$, dus s_0 is inwendig. Dit geldt voor elke $s_0 \in f^{-1}(U)$, dus deze verzameling is open.

Compactheid en continuïteit

Definitie

Zij (S, d) een metrische ruimte. Een verzameling $F \subseteq S$ heet compact als elke overdekking een eindige deeloverdekking heeft: voor elke collectie $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ van open verzamelingen zodat $F \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, bestaan er $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ zodat $F \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$.

Stelling 21.4 (i)

Zij $f: S \rightarrow S^*$ een continue afbeelding en $E \subseteq S$ compact. Dan is $f(E)$ ook compact.

Bewijs:

- Neem een open overdekking $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ van $f(E)$.
- Dan zijn de verzamelingen $f^{-1}(U_\alpha)$ open en geldt $E \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(U_\alpha)$.
- Dus bestaan er $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ zodat $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_{\alpha_i})$.
- Maar dan geldt ook $f(E) \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$.
- Dus de overdekking heeft een eindige deeloverdekking.

Compactheid en uniforme continuïteit

Definitie

Een functie $S \rightarrow S^*$ heet **uniform continu** als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat $d(f(s), f(t)) < \epsilon$ als $d(s, t) < \delta$.

Stelling 21.4 (ii)

Zij $f: S \rightarrow S^*$ continu en $E \subseteq S$ compact. Dan is f uniform continu op E .

Bewijs:

- Voor elke $s \in E$ is er een δ_s zodat $d^*(f(s), f(t)) < \epsilon$ als $d(s, t) < \delta_s$.
- De collectie $\{B(s, \frac{1}{2}\delta_s) : s \in E\}$ vormt een open overdekking van E .
- Er zijn dus s_1, \dots, s_n zodat $E \subseteq B(s_1, \frac{1}{2}\delta_{s_1}) \cup \dots \cup B(s_n, \frac{1}{2}\delta_{s_n})$.
- Laat $\delta = \frac{1}{2} \min(\delta_{s_1}, \dots, \delta_{s_n})$ en kies $s, t \in E$ met $d(s, t) < \delta$.
- Er bestaat k zodat $s \in B(s_k, \frac{1}{2}\delta_{s_k})$, dus $d(s, s_k) < \frac{1}{2}\delta_{s_k}$.
- Dan is $d(s_k, t) \leq d(s_k, s) + d(s, t) < \frac{1}{2}\delta_{s_k} + \delta \leq \delta_{s_k}$.
- Nu is $d^*(f(t), f(s_k)) < \epsilon$ en evenzo $d^*(f(s), f(s_k)) < \epsilon$, dus

$$d^*(f(s), f(t)) \leq d^*(f(s), f(s_k)) + d^*(f(s_k), f(t)) < 2\epsilon.$$

Compactheid en continuïteit

Heine-Borel

In \mathbb{R}^k is F compact desda F gesloten en begrensd is.

Stelling 21.4 (i)

Zij $f: S \rightarrow S^*$ een continue afbeelding en $E \subseteq S$ compact. Dan is $f(E)$ ook compact.

Gevolg

Zij (S, d) een metrische ruimte en $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ continu. Stel dat $E \subseteq S$ compact is. Dan

- 1 f is begrensd op E .
- 2 f neemt een maximum en minimum aan op E .

Bewijs:

- 1 Volgt direct uit de compactheid van $f(E)$ en Heine-Borel.
- 2 $f(E)$ is gesloten, dus bevat zijn supremum U en infimum L . Deze zijn eindig vanwege de begrensdheid van $f(E)$. Dan is U het maximum van f op E en L het minimum.

Limieten en functies

Definitie

Zij $f: S \rightarrow S^*$ een functie. Zij $s_0 \in S$. We schrijven

$$\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = L$$

voor zekere $L \in S^*$ als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zodat $d^*(f(s), L) < \epsilon$ geldt als $d(s, s_0) < \delta$.

Merk op: equivalent zijn

- 1 f continu in s_0 ,
- 2 $\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = f(s_0)$,
- 3 voor elke rij $s_n \rightarrow s_0$ geldt $f(s_n) \rightarrow f(s_0)$.

Situatie

In het vervolg zullen we ons beperken tot functies van \mathbb{R}^n naar \mathbb{R}^m . Vaak, maar niet altijd, is $n = 2$ en $m = 1$. We gebruiken op \mathbb{R}^k de metriek

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2} = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

afkomstig van de bijbehorende Euclidische norm

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^k x_j^2}.$$

Voor een functie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ betekent een limiet als

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{x}) = L$$

dat voor alle $\epsilon > 0$ er $\delta > 0$ is zodat $|f(\vec{x}) - L| < \epsilon$ als $\|\vec{x}\| < \delta$.

Oftewel: $f(\vec{x})$ gaat naar L als \vec{x} nadert, onafhankelijk van de richting.

Homogeniteit

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ **homogeen** van graad α als voor elke $\vec{x} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{x}) = r^\alpha f(\vec{x}).$$

Bekijk op $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ de functies

$$f_1(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^4 + y^4}, \quad f_2(x, y) = \sin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad f_3(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}.$$

Deze zijn homogeen, met graden -2 , 0 en 1 .

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ **homogeen** van graad α als voor elke $\vec{x} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{x}) = r^\alpha f(\vec{x}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{x}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs: stel $\alpha > 0$.

- De sfeer $S^{n-1} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}\| = 1\}$ is gesloten en begrensd in \mathbb{R}^n , dus compact.
- Dan is f begrensd op S^{n-1} : er is M zodat voor alle $\|\vec{x}\| \in S^{n-1}$ geldt $|f(\vec{x})| \leq M$.
- Voor \vec{x} willekeurig kunnen we schrijven $\vec{z} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$, zodat $\|\vec{z}\| = 1$ en $\vec{x} = \|\vec{x}\|\vec{z}$. Dan

$$|f(\vec{x})| = |f(\|\vec{x}\| \cdot \vec{z})| = \|\vec{x}\|^\alpha \cdot |f(\vec{z})| \leq M \|\vec{x}\|^\alpha.$$

- Dus omdat $\alpha > 0$ zien we dat $f(\vec{x}) \rightarrow 0$ als $\vec{x} \rightarrow 0$.

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ **homogeen** van graad α als voor elke $\vec{x} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{x}) = r^\alpha f(\vec{x}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{x}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs, vervolg: stel $\alpha < 0$.

- Neem \vec{x} zodat $f(\vec{x}) \neq 0$.
- Dan is $f(r\vec{x}) = r^\alpha f(\vec{x})$. Als $r \downarrow 0$ gaat dit naar $\pm\infty$.

Bekijk ten slotte $\alpha = 0$. Dan geldt $f(r\vec{x}) = f(\vec{x})$.

- Neem \vec{x} en \vec{y} zodat $f(\vec{x}) \neq f(\vec{y})$.
- Dan geldt $\lim_{r \downarrow 0} f(r\vec{x}) = f(\vec{x})$ en $\lim_{r \downarrow 0} f(r\vec{y}) = f(\vec{y})$.
- Maar $r\vec{x} \rightarrow \vec{0}$ en $r\vec{y} \rightarrow \vec{0}$ als $r \downarrow 0$, dus als $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{x})$ bestaat moet gelden

$$\lim_{r \downarrow 0} f(r\vec{x}) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{x}) = \lim_{r \downarrow 0} f(r\vec{y}).$$