OPGAVEN BIJ ANALYSE 2015, LIMIETEN VAN FUNCTIES (14)

Resultaten

Definitie. Zij $f\colon S \to S^*$ een functie. Zij $s_0 \in S$. We schrijven

$$\lim_{s \to s_0} f(s) = L$$

voor zekere $L \in S^*$ als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zodat $d\big(f(s), L\big) < \epsilon$ geldt als $d(s, s_0) < \delta$.

Definitie. We noemen $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *homogeen* van graad α als voor elke $\vec{x} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{x}) = r^\alpha f(\vec{x}).$$

Propositie. *Zij $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{x}\to\vec{0}} f(\vec{x}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.*

Opgaven

Opgave 1. Ga voor de volgende functies $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}$ na of $\lim_{\vec{x}\to\vec{0}} f(\vec{x})$ bestaat. Zo ja, bepaal de limiet.

(a) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

(b) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^4}$

(c) $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^4}$

(d) $f(x, y) = xy \log(x^2 + y^2)$

Opgave 2. Gebruik Taylorbenaderingen om te onderzoeken of $\lim_{\vec{x}\to\vec{0}} f(\vec{x})$ bestaat voor de volgende functies. *Herinner*: $\log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$.

(a) $f(x, y) = \dfrac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$

(b) $f(x, y) = \dfrac{\log(1 + x^2y^2)}{x^2 + y^2}$

Opgave 3. Bewijs dat de afbeelding $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$ continu is op $\mathbb{R}^k$.

Opgave 4. Bewijs dat de volgende functie $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continu is:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2-y^2} - 1}{x^2 - y^2} & \text{als } x^2 \neq y^2 \\ 1 & \text{als } x^2 = y^2 \end{cases}$$