Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

Differentiëren in $\mathbb{R}^n$ (15)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

Differentiëren in $\mathbb{R}^n$

Voor een functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is de afgeleide in het punt a gedefinieerd als

$$f'(a) := \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

indien deze limiet bestaat. We willen dit generaliseren naar functies van $\mathbb{R}^k$ naar $\mathbb{R}^\ell$.

- Voor een functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\ell$ is er geen probleem: $f = (f_1, \ldots, f_\ell)^\top$, waar iedere f_i een functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is. Dus we kunnen bekijken

$$f'(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_\ell'(a) \end{pmatrix}.$$

- Voor een functie $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ is het lastiger. We hebben nu $f(\vec{\mathbf{x}}) = f(x_1, \ldots, x_k)$. We kunnen nu bijv. $x_2, \ldots, x_k$ vast nemen en kijken naar

$$g(t) = f(t, x_2, \ldots, x_k).$$

Dan is $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en kunnen we naar $g'(x_1)$ kijken.

Partiële afgeleides

Bekijk $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. We nemen $x_2 = a_2$ vast en bekijken $g(t) = f(t, a_2)$. Dan definiëren we

$$D_1 f(a_1, a_2) := g'(a_1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h},$$

de partiële afgeleide van f naar de eerste coördinaat. Zo ook

$$D_2 f(a_1, a_2) := \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, a_2 + h) - f(a_1, a_2)}{h}.$$

In vectornotatie, met $\vec{\mathbf{e}}_i$ de i-de standaardbasisvector:

$$D_i f(\vec{\mathbf{a}}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{\mathbf{a}} + h\vec{\mathbf{e}}_i) - f(\vec{\mathbf{a}})}{h}.$$

Partiële afgeleides van nette functies berekenen is eenvoudig: als we bijvoorbeeld kijken naar $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2 + x_1 x_2$, dan is

$$D_1 f(\vec{\mathbf{a}}) = 1 + a_2, \qquad D_2 f(\vec{\mathbf{a}}) = 2a_2 + a_1.$$

Richtingsafgeleide

Definitie

Voor $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definiëren we

$$D_i f(\vec{\mathbf{a}}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{\mathbf{a}} + h\vec{\mathbf{e}}_i) - f(\vec{\mathbf{a}})}{h},$$

de partiële afgeleide van f naar de i-de coördinaat.

We bekijken hier de afgeleide van f in k specifieke richtingen, maar we kunnen ook algemener voor $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^k$ en definiëren

$$D_{\vec{\mathbf{u}}} f(\vec{\mathbf{a}}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{\mathbf{a}} + h\vec{\mathbf{u}}) - f(\vec{\mathbf{a}})}{h},$$

de richtingsafgeleide in de richting $\vec{\mathbf{u}}$. Merk op dat $D_i f = D_{\vec{\mathbf{e}}_i} f$.

Voorbeeld

Definitie

Voor $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definiëren we

$$D_{\vec{\mathbf{u}}} f(\vec{\mathbf{a}}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{\mathbf{a}} + h\vec{\mathbf{u}}) - f(\vec{\mathbf{a}})}{h},$$

de richtingsafgeleide in de richting $\vec{\mathbf{u}}$.

Bekijk weer f met $f(0,0) = 0$ en

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \qquad \text{voor } (x,y) \neq (0,0).$$

Gezien: f is niet continu in 0. Merk op $D_1 f(0,0) = 0 = D_2 f(0,0)$. Verder hebben we voor $\vec{\mathbf{u}} = (x,y)$ dat

$$D_{\vec{\mathbf{u}}} f(\vec{\mathbf{0}}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(hx, hy)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{xy^2}{x^2 + h^2 y^4} = \begin{cases} 0 & \text{als } x = 0 \\ y^2/x & \text{anders.} \end{cases}$$

Dus alle richtingsafgeleiden bestaan.

Terug naar $\mathbb{R}$

Voor een functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is de afgeleide in het punt a gedefinieerd als

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

Dus f differentieerbaar is in a met afgeleide $f'(a)$ dan en slechts dan als

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h}.$$

Oftewel: $f(a+h) - f(a) - f'(a)h =: r(h)$ voldoet aan $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. Een functie is dus differentieerbaar in a met afgeleide $f(a)$ als we kunnen schrijven

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + r(h), \qquad \text{met} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Of in o-notatie:

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + o(h) \quad \text{voor } h \to 0.$$

Differentiëren: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$

Definitie

Een functie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is differentieerbaar in $a \in \mathbb{R}$ als er een getal $L \in \mathbb{R}$ bestaat zodat

$$f(a+h) - f(a) = Lh + o(h) \quad \text{voor } h \to 0.$$

We schrijven dan $f'(a)$ voor L, de afgeleide in a.

Bekijk nu $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ en $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^k$. We willen nu zeggen dat f differentieerbaar is in $\vec{\mathbf{a}}$ als er een L bestaat zodat

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = L\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|), \quad \text{voor } \vec{\mathbf{h}} \to \vec{\mathbf{0}}.$$

Hier is L nu een lineaire afbeelding $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$, die correspondeert met een $l \times k$ matrix. We schrijven dan $f'(\vec{\mathbf{a}})$ of $Df(\vec{\mathbf{a}})$ voor L. Bovenstaande betekent dus dat

$$\lim_{\vec{\mathbf{h}} \to 0} \frac{f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) - L\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|} = 0.$$

Differentiëren in $\mathbb{R}^n$

Definitie

Een functie $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ is differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^k$ als er een lineaire afbeelding $L \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^\ell)$ bestaat zodat

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = L\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|) \quad \text{voor } \vec{\mathbf{h}} \to 0.$$

We schrijven dan $f'(\vec{\mathbf{a}})$ voor L, de (totale) afgeleide in $\vec{\mathbf{a}}$.

Voorbeeld: $k = 2$, $\ell = 1$, $f(\vec{\mathbf{x}}) = x_1^2 + 2x_2^2$. Er geldt

$$\begin{aligned} f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) &= (a_1 + h_1)^2 + 2(a_2 + h_2)^2 - a_1^2 - 2a_2^2 \\ &= 2a_1 h_1 + 4a_2 h_2 + h_1^2 + 2h_2^2 \\ &= [2a_1 \ 4a_2] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + h_1^2 + 2h_2^2, \end{aligned}$$

en we hebben $\frac{h_1^2 + 2h_2^2}{\|\vec{\mathbf{h}}\|} \leq \frac{\|\vec{\mathbf{h}}\|^2 + 2\|\vec{\mathbf{h}}\|^2}{\|\vec{\mathbf{h}}\|} = 3\|\vec{\mathbf{h}}\| \to 0$, dus f is differentieerbaar met afgeleide $f'(\vec{\mathbf{a}}) = [2a_1, 4a_2]$.

Uniciteit van de afgeleide

Definitie

Een functie $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ is differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^k$ als er een lineaire afbeelding $L \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^\ell)$ bestaat zodat

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = L\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|) \quad \text{voor } \vec{\mathbf{h}} \to 0.$$

We schrijven dan $f'(\vec{\mathbf{a}})$ voor L, de (totale) afgeleide in $\vec{\mathbf{a}}$.

Is deze L uniek? Stel dat L en K beiden afgeleides van f zijn:

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = L\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|) = K\vec{\mathbf{h}} + o(\vec{\mathbf{h}}).$$

Dan is $(L - K)\vec{\mathbf{h}} = o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$. We hebben dus

$$0 = \lim_{\vec{\mathbf{h}} \to 0} \frac{(L-K)\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|} \quad \Rightarrow \quad 0 = \lim_{t \downarrow 0} \frac{(L-K)t\vec{\mathbf{x}}}{\|t\vec{\mathbf{x}}\|} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{(L-K)\vec{\mathbf{x}}}{\|\vec{\mathbf{x}}\|} = \frac{(L-K)\vec{\mathbf{x}}}{\|\vec{\mathbf{x}}\|}$$

voor $\vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ en $t > 0$. Dus is $L\vec{\mathbf{x}} = K\vec{\mathbf{x}}$ voor alle $\vec{\mathbf{x}}$.