OPGAVEN BIJ ANALYSE 2015, DIFFERENTIËREN IN $\mathbb{R}^n$ (15)

Resultaten

Definitie. Voor $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definiëren we

$$D_i f(\vec{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{e}_i) - f(\vec{a})}{h},$$

de *partiële afgeleide* van f naar de i-de coördinaat.

Definitie. Voor $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definiëren we

$$D_{\vec{u}} f(\vec{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{u}) - f(\vec{a})}{h},$$

de *richtingsafgeleide* in de richting $\vec{u}$.

Definitie. Een functie $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ is differentieerbaar in $\vec{a} \in \mathbb{R}^k$ als er een lineaire afbeelding $L \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^\ell)$ bestaat zodat

$$f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) = L\vec{h} + o(\|\vec{h}\|) \quad \text{voor } \vec{h} \to 0.$$

We schrijven dan $f'(\vec{a})$ voor L, de *(totale) afgeleide* in $\vec{a}$.

Opgaven

Opgave 1. Bekijk $E\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}$ en $f\colon E \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x, y, z) = x^y y^z z^x$. Bepaal de partiële afgeleides van f.

Opgave 2. Zij $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ een functie zodat alle partiële afgeleiden bestaan op heel $\mathbb{R}^k$. Stel dat $D_i f(\vec{x}) = 0$ voor alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$ en alle i. Bewijs dat er een $c \in \mathbb{R}$ is zodat $f(\vec{x}) = c$ voor alle $\vec{x}$.

Opgave 3. Laat $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met $f(0, 0) = 0$ en $f(x, y) = \frac{y^4}{x^2+y^2}$ voor $(x, y) \neq (0, 0)$.

(a) Bewijs dat f continu is in $\vec{0}$.
(b) Bepaal de partiële afgeleiden $D_1 f$ en $D_2 f$ in $\vec{0}$ (met de definitie).
(c) Bepaal de partiële afgeleiden $D_1 f$ en $D_2 f$ buiten $\vec{0}$ (met de gebruikelijke regels voor differentiëren). Zijn de partiële afgeleides continu in $\vec{0}$?
(d) Zij $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$. Bepaal de richtingsafgeleide $D_{\vec{u}} f(0, 0)$.
(e) Bewijs dat f (totaal) differentieerbaar is in $\vec{0}$.