UITWERKINGEN BIJ ANALYSE 2015, DIFFERENTIËREN IN $\mathbb{R}^n$ (16)

Opgave 4.

(a) Deze functie is homogeen van graad 0, dus continu noch differentieerbaar.

(b) Deze functie is homogeen van graad 1, dus zeker continu. De richtingsafgeleide in $\vec{0}$ in de richting (x, y) wordt gegeven door

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(hx, hy)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$$

en dit is niet lineair in $\vec{u} = (x, y)$. De functie kan dus niet differentieerbaar zijn.

(c) Merk op

$$|f(x, y)| = |xy \sin \|\vec{x}\|^{-2}| \leq \|\vec{x}\|^2 |\sin \|\vec{x}\|^{-2}| \leq \|\vec{x}\|^2.$$

We zien dat f zeker continu is in $\vec{0}$. We claimen dat hij ook differentieerbaar is met afgeleide $\vec{0}$:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{f(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} \leq \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \|\vec{h}\| = 0.$$

(d) Merk op dat

$$|f(x, y)| \leq \frac{x^2 |\sin y^2|}{x^2} = |\sin y^2| \leq \sin \|\vec{x}\|^2,$$

dus f is zeker continu in 0. Ook hier is de afgeleide $\vec{0}$. We gebruiken $\sin z = z + O(z^3)$:

$$\lim_{\vec{h}\to vc0} \frac{f(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\sin \|\vec{h}\|}{\|\vec{h}\|} = \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\|\vec{h}\|^2 + O(\|\vec{h}\|^6)}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

(e) We hebben nu

$$|f(x, y)| \leq \frac{|x|^3}{x^2} = |x|,$$

dus ook deze functie is continu in 0. De richtingsafgeleide is

$$D_{(x,y)} f(\vec{0}) = \lim_{h\to 0} \frac{x^3}{x^2 + h^4(x^2 + y^2)^2} = x.$$

Dit is linear in $(\vec{x}, \vec{y})$ en suggereert dat $f'(\vec{0}) = [1 \quad 0]$. We bekijken voor $\vec{h} = (x, y)$ nu

$$f(\vec{h}) - [1 \quad 0]\vec{h} = \frac{x^3}{x^2 + (x^2 + y^2)^2} - x = \frac{-x(x^2 + y^2)^2}{x^2 + (x^2 + y^2)^2} = \frac{-x\|\vec{h}\|^4}{x^2 + \|\vec{h}\|^4}$$

Nu vinden we door te gebruiken $a^2 + b^2 \geq 2ab$ dat

$$\left| \frac{f(\vec{h}) - [1 \quad 0]\vec{h}}{\|\vec{h}\|} \right| \leq \frac{x\|\vec{h}\|^3}{x^2 + \|\vec{h}\|^4} \leq \frac{x\|\vec{h}\|^3}{2x\|\vec{h}\|} = \|\vec{h}\| \to 0,$$

dus de functie is inderdaad differentieerbaar.

(f) We claimen dat de functie differentieerbaar is. Merk op dat $\log(x^4 + y^2) < 0$ voor (x, y) klein. Er gedt

$$0 \geq \frac{x^2 \log(x^4 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \geq \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} |x| \log(x^4) \geq |x| \log(x^4),$$

want $|x|/\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$. We weten dat $|x| \log x^4 = 4|x| \log x \to 0$, dus dit gaat inderdaad naar nul.