Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

Differentiëren en continuïteit in $\mathbb{R}^n$ (17)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

Differentieerbaarheid tot nu toe

Verband tussen afgeleides

Zij $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ een (totaal) differentieerbare afbeelding.

- Dan is $f'(\vec{\mathbf{a}})$ een lineaire afbeelding $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ met matrix

$$f'(\vec{\mathbf{a}}) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(\vec{\mathbf{a}}) & D_2 f_1(\vec{\mathbf{a}}) & \cdots & D_k f_1(\vec{\mathbf{a}}) \\ D_1 f_2(\vec{\mathbf{a}}) & D_2 f_2(\vec{\mathbf{a}}) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ D_1 f_\ell(\vec{\mathbf{a}}) & \cdots & \cdots & D_k f_\ell(\vec{\mathbf{a}}) \end{pmatrix}.$$

- Voor $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^k$ geldt $D_{\vec{\mathbf{u}}} f(\vec{\mathbf{a}}) = f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{u}}$.

Vragen:

- Hoe kunnen we spreken over continuïteit van de afgeleide?
- Is een differentieerbare functie ook continu?

Operatornorm

Zij V, W genormeerde vectorruimten en $L : V \to W$ een lineaire afbeelding.

- Definieer

$$\|L\|_{\text{op}} = \sup_{x \in V\setminus\{0\}} \frac{\|Lx\|_W}{\|x\|_V}.$$

- Merk op dat

$$\|L\|_{\text{op}} = \sup_{x \neq 0} \left\| L \frac{x}{\|x\|_V} \right\|_W = \sup_{\|x\|_V = 1} \|Lx\|_W = \sup_{x \in S^{n-1}} \|Lx\|_W < \infty,$$

  want S^{n-1} is compact en L is continu (als V, W eindig-dimensionaal).
- Claim: dit is een norm op $\mathrm{Lin}(V, W)$.
  1. $\|L\| = 0 \Leftrightarrow L = 0$
  2. $\|\lambda L\| = |\lambda| \|L\|$ voor $\lambda \in \mathbb{R}$
  3. $\|K + L\| \leq \|K\| + \|L\|$

Eigenschappen van de operatornorm

Zij V, W genormeerde vectorruimten en $L : V \to W$ een lineaire afbeelding. We definiëren de operatornorm

$$\|L\| := \sup_{x \in V\setminus\{0\}} \frac{\|Lx\|}{\|x\|}.$$

- Merk op: voor $x \in V$ geldt

$$\frac{\|Lx\|}{\|x\|} \leq \|L\| \quad \Rightarrow \quad \|Lx\| \leq \|L\| \cdot \|x\|.$$

- Als $K : W \to U$ een lineaire afbeelding is, dan geldt

$$\|KLx\| = \|K(Lx)\| \leq \|K\| \|Lx\| \leq \|K\| \|L\| \|x\|,$$

  dus

$$\|KL\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|KLx\|}{\|x\|} \leq \|K\| \|L\|.$$

Differentieerbaarheid en continuïteit

Propositie 8.16

Zij $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^k$. Dan is f continu in $\vec{\mathbf{a}}$.

Bewijs:

- We bekijken
$$\left\|f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}})\right\| = \left\|f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\right\|.$$
- Er geldt $\|f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}\| \le \|f'(\vec{\mathbf{a}})\|\|\vec{\mathbf{h}}\|$.
- Er bestaat een $\delta > 0$ zodat voor $\|\vec{\mathbf{h}}\| < \delta$ geldt
$$\left\|\frac{o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right\| < 1.$$
- We zien dat voor $\|\vec{\mathbf{h}}\| < \delta$ geldt
$$\begin{aligned}\|f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}})\| &\le \|f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}\| + \left\|o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\right\| \\ &< \|f'(\vec{\mathbf{a}})\|\|\vec{\mathbf{h}}\| + \|\vec{\mathbf{h}}\| = \big(\|f'(\vec{\mathbf{a}})\| + 1\big)\|\vec{\mathbf{h}}\|.\end{aligned}$$

Continuïteit van de afgeleide

Als $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$, dan geldt voor $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^k$ dat $f'(\vec{\mathbf{a}}) \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^\ell)$ en dus is f' een afbeelding $\mathbb{R}^k \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^\ell)$.

Definitie 8.28

Zij $E \subseteq \mathbb{R}^k$ en $f\colon E \to \mathbb{R}^\ell$ differentieerbaar. Als $f'\colon E \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^\ell)$ continu is op E (met de operatornorm op het codomein), dan noemen we f continu differentieerbaar, ook wel C^1.

Herinner: $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \big(D_j f_i(\vec{\mathbf{a}})\big)_{i,j}$.

Propositie 8.29

Zij $E \subseteq \mathbb{R}^k$ en $f\colon E \to \mathbb{R}^\ell$ differentieerbaar. Dan is f' continu op E desda elk van de partiële afgeleides $D_j f_i$ continu is op E.

Continuïteit van de partiële afgeleides

Stelling 8.30

Zij $E \subseteq \mathbb{R}^k$ en $f\colon E \to \mathbb{R}$. Als elk van de partiële afgeleiden van f bestaat en continu is op E, dan is f (continu) differentieerbaar op E.

We willen bewijzen dat $f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) - \big[D_1 f(\vec{\mathbf{a}}) \cdots D_k f(\vec{\mathbf{a}})\big]\vec{\mathbf{h}} = o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$. Schrijf $f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}})$ als

$$f\underbrace{\begin{bmatrix} a_1+h_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_k+h_k \end{bmatrix}}_{\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{v}}_k} - f\underbrace{\begin{bmatrix} a_1+h_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{k-1}+h_{k-1} \\ a_k \end{bmatrix}}_{\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{v}}_{k-1}} + f\underbrace{\begin{bmatrix} a_1+h_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{k-1}+h_{k-1} \\ a_k \end{bmatrix}}_{\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{v}}_{k-1}} - f\underbrace{\begin{bmatrix} a_1+h_1 \\ \vdots \\ a_{k-2}+h_{k-2} \\ a_{k-1} \\ a_k \end{bmatrix}}_{\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{v}}_{k-2}} + \cdots + f\underbrace{\begin{bmatrix} a_1+h_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}}_{\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{v}}_1} - f\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}}_{\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{v}}_0}$$

Merk op $\vec{\mathbf{v}}_j = \vec{\mathbf{v}}_{j-1} + h_j\vec{\mathbf{e}}_j$. Nu is

$$f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{v}}_j) - f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{v}}_{j-1}) = g_j(h_j) - g_j(0) = g_j'(\xi_j)h_j = D_j f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{v}}_{j-1}+\xi_j\vec{\mathbf{e}}_j)h_j$$

waar $g_j(t) = f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{v}}_{j-1}+t\vec{\mathbf{e}}_j)$ en $\xi_j \in (0, h_j)$.

Stelling 8.30

Zij $E \subseteq \mathbb{R}^k$ en $f\colon E \to \mathbb{R}$. Als elk van de partiële afgeleiden van f bestaat en continu is op E, dan is f (continu) differentieerbaar op E.

- We willen bewijzen dat $f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) - \big[D_1 f(\vec{\mathbf{a}}) \cdots D_k f(\vec{\mathbf{a}})\big]\vec{\mathbf{h}} = o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$.
- We hebben voor $\xi_j \in (0, h_j)$ dat
$$f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = \sum_{j=1}^{k}\big(f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{v}}_j) - f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{v}}_{j-1})\big) = \sum_{j=1}^{k} D_j f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{v}}_{j-1}+\xi_j\vec{\mathbf{e}}_j)h_j.$$
- Schrijf $\vec{\mathbf{x}}^j = \vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{v}}_{j-1}+\xi_j\vec{\mathbf{e}}_j$, dan hebben we
$$\begin{aligned}\left|\frac{f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) - \big[D_1 f(\vec{\mathbf{a}}) \cdots D_k f(\vec{\mathbf{a}})\big]\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right| &= \left|\sum_{j=1}^{k}\big(D_j f(\vec{\mathbf{x}}^j) - D_j f(\vec{\mathbf{a}})\big)\frac{h_j}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right| \\ &\le \sum_{j=1}^{k}\big|D_j f(\vec{\mathbf{x}}^j) - D_j f(\vec{\mathbf{a}})\big| \to 0\end{aligned}$$

want $\vec{\mathbf{x}}^j \to \vec{\mathbf{a}}$ als $\vec{\mathbf{h}} \to 0$ en $D_j f$ is continu.