Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

Kettingregel en hogere orde afgeleides (18)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

Kettingregel

Stelling 9.1

Zij $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ en $g\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in $f(\vec{\mathbf{a}})$. Dan is $g \circ f$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ met $(g \circ f)'(\vec{\mathbf{a}}) = g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) f'(\vec{\mathbf{a}})$.

Kettingregel

Stelling 9.1

Zij $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ en $g\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in $f(\vec{\mathbf{a}})$. Dan is $g \circ f$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ met $(g \circ f)'(\vec{\mathbf{a}}) = g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)f'(\vec{\mathbf{a}})$.

Bewijs: we hebben $f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$.

Kettingregel

Stelling 9.1

Zij $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ en $g\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in $f(\vec{\mathbf{a}})$. Dan is $g \circ f$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ met $(g \circ f)'(\vec{\mathbf{a}}) = g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)f'(\vec{\mathbf{a}})$.

Bewijs: we hebben $f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$. Dus

$$(g \circ f)(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}})$$

Kettingregel

Stelling 9.1

Zij $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ en $g\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in $f(\vec{\mathbf{a}})$. Dan is $g \circ f$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ met $(g \circ f)'(\vec{\mathbf{a}}) = g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)f'(\vec{\mathbf{a}})$.

Bewijs: we hebben $f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$. Dus

$$(g \circ f)(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = g\big(f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}})\big)$$

Kettingregel

Stelling 9.1

Zij $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ en $g\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in $f(\vec{\mathbf{a}})$. Dan is $g \circ f$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ met $(g \circ f)'(\vec{\mathbf{a}}) = g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)f'(\vec{\mathbf{a}})$.

Bewijs: we hebben $f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$. Dus

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) &= g\big(f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}})\big) \\ &= g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)\end{aligned}$$

Kettingregel

Stelling 9.1

Zij $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ en $g\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in $f(\vec{\mathbf{a}})$. Dan is $g \circ f$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ met $(g \circ f)'(\vec{\mathbf{a}}) = g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) f'(\vec{\mathbf{a}})$.

Bewijs: we hebben $f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$. Dus

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) &= g\big(f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}})\big) \\ &= g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)\end{aligned}$$

We gebruiken $g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + \vec{\mathbf{k}}\big) = g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\vec{\mathbf{k}} + o(\|\vec{\mathbf{k}}\|)$

Kettingregel

Stelling 9.1

Zij $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ en $g\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in $f(\vec{\mathbf{a}})$. Dan is $g \circ f$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ met $(g \circ f)'(\vec{\mathbf{a}}) = g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) f'(\vec{\mathbf{a}})$.

Bewijs: we hebben $f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$. Dus

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) &= g\big(f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}})\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\big(f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&\qquad + o\big(\big\|f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big\|\big)
\end{aligned}
$$

We gebruiken $g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + \vec{\mathbf{k}}\big) = g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\vec{\mathbf{k}} + o(\|\vec{\mathbf{k}}\|)$

Kettingregel

Stelling 9.1

Zij $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ en $g\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in $f(\vec{\mathbf{a}})$. Dan is $g \circ f$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ met $(g \circ f)'(\vec{\mathbf{a}}) = g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)f'(\vec{\mathbf{a}})$.

Bewijs: we hebben $f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$. Dus

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) &= g\big(f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}})\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\big(f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&\qquad\qquad + o\big(\big\|f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big\|\big) \\
&= (g \circ f)(\vec{\mathbf{a}}) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)o(\|\vec{\mathbf{h}}\|) + o\big(\big\|f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big\|\big)
\end{aligned}$$

We gebruiken $g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + \vec{\mathbf{k}}\big) = g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\vec{\mathbf{k}} + o(\|\vec{\mathbf{k}}\|)$

Kettingregel

Stelling 9.1

Zij $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ en $g\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in $f(\vec{\mathbf{a}})$. Dan is $g \circ f$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ met $(g \circ f)'(\vec{\mathbf{a}}) = g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) f'(\vec{\mathbf{a}})$.

Bewijs: we hebben $f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$. Dus

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) &= g\big(f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}})\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\big(f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&\qquad\qquad + o\big(\big\|f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big\|\big) \\
&= (g \circ f)(\vec{\mathbf{a}}) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|) + o\big(\big\|f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big\|\big)
\end{aligned}
$$

We gebruiken $g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + \vec{\mathbf{k}}\big) = g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\vec{\mathbf{k}} + o(\|\vec{\mathbf{k}}\|)$

Kettingregel

Stelling 9.1

Zij $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ en $g\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in $f(\vec{\mathbf{a}})$. Dan is $g \circ f$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ met $(g \circ f)'(\vec{\mathbf{a}}) = g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)f'(\vec{\mathbf{a}})$.

Bewijs: we hebben $f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$. Dus

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) &= g\big(f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}})\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\big(f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&\qquad + o\big(\big\|f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big\|\big) \\
&= (g \circ f)(\vec{\mathbf{a}}) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|) + o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)
\end{aligned}
$$

We gebruiken $g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + \vec{\mathbf{k}}\big) = g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\vec{\mathbf{k}} + o(\|\vec{\mathbf{k}}\|)$

Kettingregel

Stelling 9.1

Zij $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ en $g\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in $f(\vec{\mathbf{a}})$. Dan is $g \circ f$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ met $(g \circ f)'(\vec{\mathbf{a}}) = g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) f'(\vec{\mathbf{a}})$.

Bewijs: we hebben $f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$. Dus

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) &= g\big(f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}})\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\big(f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&\qquad + o\big(\big\|f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big\|\big) \\
&= (g \circ f)(\vec{\mathbf{a}}) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|) + o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)
\end{aligned}$$

We gebruiken $g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + \vec{\mathbf{k}}\big) = g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\vec{\mathbf{k}} + o(\|\vec{\mathbf{k}}\|)$ en $o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) = o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$:

Kettingregel

Stelling 9.1

Zij $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ en $g\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in $f(\vec{\mathbf{a}})$. Dan is $g \circ f$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ met $(g \circ f)'(\vec{\mathbf{a}}) = g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) f'(\vec{\mathbf{a}})$.

Bewijs: we hebben $f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$. Dus

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) &= g\big(f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}})\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\big(f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&\qquad\qquad + o\big(\big\|f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big\|\big) \\
&= (g \circ f)(\vec{\mathbf{a}}) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|) + o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)
\end{aligned}$$

We gebruiken $g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + \vec{\mathbf{k}}\big) = g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\vec{\mathbf{k}} + o(\|\vec{\mathbf{k}}\|)$ en $o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) = o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$:

$$\frac{\big|o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)\big|}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}$$

Kettingregel

Stelling 9.1

Zij $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ en $g\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in $f(\vec{\mathbf{a}})$. Dan is $g \circ f$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ met $(g \circ f)'(\vec{\mathbf{a}}) = g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)f'(\vec{\mathbf{a}})$.

Bewijs: we hebben $f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$. Dus

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) &= g\big(f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}})\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\big(f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&\qquad\qquad + o\big(\big\|f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big\|\big) \\
&= (g \circ f)(\vec{\mathbf{a}}) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|) + o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)
\end{aligned}$$

We gebruiken $g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + \vec{\mathbf{k}}\big) = g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\vec{\mathbf{k}} + o(\|\vec{\mathbf{k}}\|)$ en $o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) = o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$:

$$\frac{\big|o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)\big|}{\|\vec{\mathbf{h}}\|} = \left|\frac{o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)}{O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)}\,\frac{O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right|$$

Kettingregel

Stelling 9.1

Zij $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ en $g\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in $f(\vec{\mathbf{a}})$. Dan is $g \circ f$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ met $(g \circ f)'(\vec{\mathbf{a}}) = g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) f'(\vec{\mathbf{a}})$.

Bewijs: we hebben $f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$. Dus

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) &= g\big(f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}})\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\big(f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&\qquad + o\big(\big\|f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big\|\big) \\
&= (g \circ f)(\vec{\mathbf{a}}) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|) + o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)
\end{aligned}$$

We gebruiken $g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + \vec{\mathbf{k}}\big) = g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\vec{\mathbf{k}} + o(\|\vec{\mathbf{k}}\|)$ en $o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) = o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$:

$$\frac{\big|o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)\big|}{\|\vec{\mathbf{h}}\|} = \left|\frac{o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)}{O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)} \frac{O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right| \le C \left|\frac{o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)}{O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)}\right|$$

Kettingregel

Stelling 9.1

Zij $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ en $g\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in $f(\vec{\mathbf{a}})$. Dan is $g \circ f$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ met $(g \circ f)'(\vec{\mathbf{a}}) = g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)f'(\vec{\mathbf{a}})$.

Bewijs: we hebben $f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$. Dus

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) &= g\big(f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}})\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\big(f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&\qquad + o\big(\big\|f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big\|\big) \\
&= (g \circ f)(\vec{\mathbf{a}}) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|) + o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)
\end{aligned}$$

We gebruiken $g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + \vec{\mathbf{k}}\big) = g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\vec{\mathbf{k}} + o(\|\vec{\mathbf{k}}\|)$ en $o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) = o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$:

$$\frac{\big|o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)\big|}{\|\vec{\mathbf{h}}\|} = \left|\frac{o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)}{O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)}\,\frac{O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right| \le C\left|\frac{o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)}{O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)}\right| \to 0 \quad \text{als} \quad \vec{\mathbf{h}} \to \vec{\mathbf{0}}.$$

Kettingregel

Stelling 9.1

Zij $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ en $g\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in $f(\vec{\mathbf{a}})$. Dan is $g \circ f$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ met $(g \circ f)'(\vec{\mathbf{a}}) = g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) f'(\vec{\mathbf{a}})$.

Bewijs: we hebben $f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$. Dus

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) &= g\big(f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}})\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\big(f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&\qquad\quad + o\big(\big\|f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big\|\big) \\
&= (g \circ f)(\vec{\mathbf{a}}) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|) + o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&= (g \circ f)(\vec{\mathbf{a}}) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|) + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)
\end{aligned}$$

We gebruiken $g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + \vec{\mathbf{k}}\big) = g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\vec{\mathbf{k}} + o(\|\vec{\mathbf{k}}\|)$ en $o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) = o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$:

$$\frac{\big|o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)\big|}{\|\vec{\mathbf{h}}\|} = \left|\frac{o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)}{O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)} \frac{O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right| \le C \left|\frac{o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)}{O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)}\right| \to 0 \quad \text{als} \quad \vec{\mathbf{h}} \to \vec{\mathbf{0}}.$$

Kettingregel

Stelling 9.1

Zij $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ en $g\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in $f(\vec{\mathbf{a}})$. Dan is $g \circ f$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ met $(g \circ f)'(\vec{\mathbf{a}}) = g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)f'(\vec{\mathbf{a}})$.

Bewijs: we hebben $f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$. Dus

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) &= g\big(f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}})\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\big(f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&\qquad\quad + o\big(\big\|f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big\|\big) \\
&= (g \circ f)(\vec{\mathbf{a}}) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|) + o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&= (g \circ f)(\vec{\mathbf{a}}) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)
\end{aligned}$$

We gebruiken $g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + \vec{\mathbf{k}}\big) = g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\vec{\mathbf{k}} + o(\|\vec{\mathbf{k}}\|)$ en $o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) = o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$:

$$\frac{\big|o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)\big|}{\|\vec{\mathbf{h}}\|} = \left|\frac{o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)}{O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)}\,\frac{O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right| \le C\left|\frac{o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)}{O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)}\right| \to 0 \quad \text{als} \quad \vec{\mathbf{h}} \to \vec{\mathbf{0}}.$$

Kettingregel

Stelling 9.1

Zij $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ en $g\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in $f(\vec{\mathbf{a}})$. Dan is $g \circ f$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ met $(g \circ f)'(\vec{\mathbf{a}}) = g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) f'(\vec{\mathbf{a}})$.

Bewijs: we hebben $f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$. Dus

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) &= g\big(f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}})\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\big(f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&\qquad\qquad + o\big(\big\|f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big\|\big) \\
&= (g \circ f)(\vec{\mathbf{a}}) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|) + o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&= (g \circ f)(\vec{\mathbf{a}}) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)
\end{aligned}$$

We gebruiken $g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + \vec{\mathbf{k}}\big) = g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\vec{\mathbf{k}} + o(\|\vec{\mathbf{k}}\|)$ en $o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) = o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$:

$$\frac{\big|o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)\big|}{\|\vec{\mathbf{h}}\|} = \left| \frac{o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)}{O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)} \frac{O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)}{\|\vec{\mathbf{h}}\|} \right| \leq C \left| \frac{o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)}{O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)} \right| \to 0 \quad \text{als} \quad \vec{\mathbf{h}} \to \vec{\mathbf{0}}.$$

Voorbeeld: kettingregel

Bekijk $f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Voorbeeld: kettingregel

Bekijk $f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zij $h(t) = g\big(f_1(t), f_2(t)\big)$.

Voorbeeld: kettingregel

Bekijk $f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zij $h(t) = g\big(f_1(t), f_2(t)\big)$. Dan is $h = g \circ f$ met $f = (f_1, f_2)$.

Voorbeeld: kettingregel

Bekijk $f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zij $h(t) = g\big(f_1(t), f_2(t)\big)$. Dan is $h = g \circ f$ met $f = (f_1, f_2)$. Er geldt

$$h'(t)$$

Voorbeeld: kettingregel

Bekijk $f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zij $h(t) = g\big(f_1(t), f_2(t)\big)$. Dan is $h = g \circ f$ met $f = (f_1, f_2)$. Er geldt

$$h'(t) = (g \circ f)'(t)$$

Voorbeeld: kettingregel

Bekijk $f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zij $h(t) = g\big(f_1(t), f_2(t)\big)$. Dan is $h = g \circ f$ met $f = (f_1, f_2)$. Er geldt

$$h'(t) = (g \circ f)'(t) = g'\big(f(t)\big)f'(t).$$

Voorbeeld: kettingregel

Bekijk $f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zij $h(t) = g\big(f_1(t), f_2(t)\big)$. Dan is $h = g \circ f$ met $f = (f_1, f_2)$. Er geldt

$$h'(t) = (g \circ f)'(t) = g'\big(f(t)\big)f'(t).$$

Merk op

$$g'(x, y)$$

Voorbeeld: kettingregel

Bekijk $f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zij $h(t) = g\big(f_1(t), f_2(t)\big)$. Dan is $h = g \circ f$ met $f = (f_1, f_2)$. Er geldt

$$h'(t) = (g \circ f)'(t) = g'\big(f(t)\big)f'(t).$$

Merk op

$$g'(x, y) = \begin{bmatrix} D_1 g(x, y) & D_2 g(x, y) \end{bmatrix}$$

Voorbeeld: kettingregel

Bekijk $f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zij $h(t) = g\big(f_1(t), f_2(t)\big)$. Dan is $h = g \circ f$ met $f = (f_1, f_2)$. Er geldt

$$h'(t) = (g \circ f)'(t) = g'\big(f(t)\big)f'(t).$$

Merk op

$$g'(x, y) = \begin{bmatrix} D_1 g(x, y) & D_2 g(x, y) \end{bmatrix}, \qquad f'(t) = \begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix}.$$

Voorbeeld: kettingregel

Bekijk $f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zij $h(t) = g\big(f_1(t), f_2(t)\big)$. Dan is $h = g \circ f$ met $f = (f_1, f_2)$. Er geldt

$$h'(t) = (g \circ f)'(t) = g'\big(f(t)\big) f'(t).$$

Merk op

$$g'(x, y) = \begin{bmatrix} D_1 g(x, y) & D_2 g(x, y) \end{bmatrix}, \qquad f'(t) = \begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix}.$$

Dus

$$h'(t)$$

Voorbeeld: kettingregel

Bekijk $f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zij $h(t) = g\big(f_1(t), f_2(t)\big)$. Dan is $h = g \circ f$ met $f = (f_1, f_2)$. Er geldt

$$h'(t) = (g \circ f)'(t) = g'\big(f(t)\big) f'(t).$$

Merk op

$$g'(x,y) = \begin{bmatrix} D_1 g(x,y) & D_2 g(x,y) \end{bmatrix}, \qquad f'(t) = \begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix}.$$

Dus

$$h'(t) = \begin{bmatrix} D_1 g\big(f_1(t), f_2(t)\big) & D_2 g\big(f_1(t), f_2(t)\big) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix}$$

Voorbeeld: kettingregel

Bekijk $f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zij $h(t) = g\big(f_1(t), f_2(t)\big)$. Dan is $h = g \circ f$ met $f = (f_1, f_2)$. Er geldt

$$h'(t) = (g \circ f)'(t) = g'\big(f(t)\big) f'(t).$$

Merk op

$$g'(x, y) = \begin{bmatrix} D_1 g(x, y) & D_2 g(x, y) \end{bmatrix}, \qquad f'(t) = \begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix}.$$

Dus

$$\begin{aligned} h'(t) &= \begin{bmatrix} D_1 g\big(f_1(t), f_2(t)\big) & D_2 g\big(f_1(t), f_2(t)\big) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} \\ &= D_1 g\big(f_1(t), f_2(t)\big) f_1'(t) + D_2 g\big(f_1(t), f_2(t)\big) f_2'(t). \end{aligned}$$

Voorbeeld: kettingregel

Bekijk $f_1, f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zij $h(t) = g\big(f_1(t), f_2(t)\big)$. Dan is $h = g \circ f$ met $f = (f_1, f_2)$. Er geldt

$$h'(t) = (g \circ f)'(t) = g'\big(f(t)\big)f'(t).$$

Merk op

$$g'(x,y) = \begin{bmatrix} D_1 g(x,y) & D_2 g(x,y) \end{bmatrix}, \qquad f'(t) = \begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix}.$$

Dus

$$\begin{aligned} h'(t) &= \begin{bmatrix} D_1 g\big(f_1(t), f_2(t)\big) & D_2 g\big(f_1(t), f_2(t)\big) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} \\ &= D_1 g\big(f_1(t), f_2(t)\big) f_1'(t) + D_2 g\big(f_1(t), f_2(t)\big) f_2'(t). \end{aligned}$$

Oftewel "$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{df_1}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{df_2}{dt}$".

Afgeleides van afgeleides

Bekijk $f\colon E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

Afgeleides van afgeleides

Bekijk $f\colon E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Stel dat de partiële afgeleides van f bestaan op E.

Afgeleides van afgeleides

Bekijk $f\colon E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Stel dat de partiële afgeleides van f bestaan op E.

- Een partiële afgeleide $D_j f$ is weer een functie $E \to \mathbb{R}$.

Afgeleides van afgeleides

Bekijk $f\colon E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Stel dat de partiële afgeleides van f bestaan op E.

- Een partiële afgeleide $D_j f$ is weer een functie $E \to \mathbb{R}$.
- Als $D_j f$ partieel differentieerbaar is in $\vec{\mathbf{a}}$

Afgeleides van afgeleides

Bekijk $f\colon E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Stel dat de partiële afgeleides van f bestaan op E.

- Een partiële afgeleide $D_j f$ is weer een functie $E \to \mathbb{R}$.
- Als $D_j f$ partieel differentieerbaar is in $\vec{\mathbf{a}}$, dan bestaat de partiële afgeleide van de tweede orde van f in $\vec{\mathbf{a}}$

Afgeleides van afgeleides

Bekijk $f\colon E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Stel dat de partiële afgeleides van f bestaan op E.

- Een partiële afgeleide $D_j f$ is weer een functie $E \to \mathbb{R}$.
- Als $D_j f$ partieel differentieerbaar is in $\vec{\mathbf{a}}$, dan bestaat de partiële afgeleide van de tweede orde van f in $\vec{\mathbf{a}}$:

$$D_{ij} f(\vec{\mathbf{a}}) := \big(D_i(D_j f)\big)(\vec{\mathbf{a}})$$

Afgeleides van afgeleides

Bekijk $f : E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Stel dat de partiële afgeleides van f bestaan op E.

- Een partiële afgeleide $D_j f$ is weer een functie $E \to \mathbb{R}$.
- Als $D_j f$ partieel differentieerbaar is in $\vec{\mathbf{a}}$, dan bestaat de partiële afgeleide van de tweede orde van f in $\vec{\mathbf{a}}$:

$$D_{ij} f(\vec{\mathbf{a}}) := \big(D_i(D_j f)\big)(\vec{\mathbf{a}})$$

- Zo kunnen we doorgaan:

$$(D_{j_1 \cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}})$$

Afgeleides van afgeleides

Bekijk $f\colon E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Stel dat de partiële afgeleides van f bestaan op E.

- Een partiële afgeleide $D_j f$ is weer een functie $E \to \mathbb{R}$.
- Als $D_j f$ partieel differentieerbaar is in $\vec{\mathbf{a}}$, dan bestaat de partiële afgeleide van de tweede orde van f in $\vec{\mathbf{a}}$:

$$D_{ij} f(\vec{\mathbf{a}}) := \big(D_i(D_j f)\big)(\vec{\mathbf{a}})$$

- Zo kunnen we doorgaan:

$$(D_{j_1 \cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) = (D_{j_1} D_{j_2} \cdots D_{j_k} f)(\vec{\mathbf{a}})$$

Afgeleides van afgeleides

Bekijk $f\colon E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Stel dat de partiële afgeleides van f bestaan op E.

- Een partiële afgeleide $D_j f$ is weer een functie $E \to \mathbb{R}$.
- Als $D_j f$ partieel differentieerbaar is in $\vec{\mathbf{a}}$, dan bestaat de partiële afgeleide van de tweede orde van f in $\vec{\mathbf{a}}$:

$$D_{ij} f(\vec{\mathbf{a}}) := \big(D_i(D_j f)\big)(\vec{\mathbf{a}})$$

- Zo kunnen we doorgaan:

$$(D_{j_1 \cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) = (D_{j_1} D_{j_2} \cdots D_{j_k} f)(\vec{\mathbf{a}})$$

  is een k-de orde partiële afgeleide van f, als deze bestaat.

Afgeleides van afgeleides

Bekijk $f : E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Stel dat de partiële afgeleides van f bestaan op E.

- Een partiële afgeleide $D_j f$ is weer een functie $E \to \mathbb{R}$.
- Als $D_j f$ partieel differentieerbaar is in $\vec{\mathbf{a}}$, dan bestaat de partiële afgeleide van de tweede orde van f in $\vec{\mathbf{a}}$:

$$D_{ij} f(\vec{\mathbf{a}}) := \big(D_i(D_j f)\big)(\vec{\mathbf{a}})$$

- Zo kunnen we doorgaan:

$$(D_{j_1 \cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) = (D_{j_1} D_{j_2} \cdots D_{j_k} f)(\vec{\mathbf{a}})$$

  is een k-de orde partiële afgeleide van f, als deze bestaat.
- Als alle k-de orde partiële afgeleides van f continu zijn op E, zeggen we dat f een C^k afbeelding is op E.

Afgeleides van afgeleides

Bekijk $f : E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Stel dat de partiële afgeleides van f bestaan op E.

- Een partiële afgeleide $D_j f$ is weer een functie $E \to \mathbb{R}$.
- Als $D_j f$ partieel differentieerbaar is in $\vec{\mathbf{a}}$, dan bestaat de partiële afgeleide van de tweede orde van f in $\vec{\mathbf{a}}$:

$$D_{ij} f(\vec{\mathbf{a}}) := \big(D_i(D_j f)\big)(\vec{\mathbf{a}})$$

- Zo kunnen we doorgaan:

$$(D_{j_1 \cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) = (D_{j_1} D_{j_2} \cdots D_{j_k} f)(\vec{\mathbf{a}})$$

  is een k-de orde partiële afgeleide van f, als deze bestaat.
- Als alle k-de orde partiële afgeleides van f continu zijn op E, zeggen we dat f een C^k afbeelding is op E.

Men schrijft ook wel $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}$ voor $D_{j_1 \cdots j_k} f$.

Tweede-orde partiële afgeleides

Tweede-orde partiële afgeleides

Voorbeeld: bekijk $f(x, y) = x^3y + xy$.

Tweede-orde partiële afgeleides

Voorbeeld: bekijk $f(x, y) = x^3y + xy$. Dan is

$$D_1 f(x, y)$$

Tweede-orde partiële afgeleides

Voorbeeld: bekijk $f(x, y) = x^3y + xy$. Dan is

$$D_1 f(x, y) = 3x^2y + y$$

Tweede-orde partiële afgeleides

Voorbeeld: bekijk $f(x, y) = x^3y + xy$. Dan is

$$D_1 f(x, y) = 3x^2y + y, \qquad\qquad D_2 f(x, y)$$

Tweede-orde partiële afgeleides

Voorbeeld: bekijk $f(x, y) = x^3y + xy$. Dan is

$$D_1 f(x, y) = 3x^2y + y, \qquad D_2 f(x, y) = x^3 + x$$

Tweede-orde partiële afgeleides

Voorbeeld: bekijk $f(x, y) = x^3y + xy$. Dan is

$$D_1f(x, y) = 3x^2y + y, \qquad D_2f(x, y) = x^3 + x$$

$$D_{11}f(x, y)$$

Tweede-orde partiële afgeleides

Voorbeeld: bekijk $f(x, y) = x^3y + xy$. Dan is

$$D_1f(x, y) = 3x^2y + y, \qquad D_2f(x, y) = x^3 + x$$

$$D_{11}f(x, y) = 6xy$$

Tweede-orde partiële afgeleides

Voorbeeld: bekijk $f(x, y) = x^3 y + xy$. Dan is

$$D_1 f(x, y) = 3x^2 y + y, \qquad D_2 f(x, y) = x^3 + x$$

$$D_{11} f(x, y) = 6xy$$
$$D_{21} f(x, y)$$

Tweede-orde partiële afgeleides

Voorbeeld: bekijk $f(x, y) = x^3 y + xy$. Dan is

$$D_1 f(x, y) = 3x^2 y + y, \qquad D_2 f(x, y) = x^3 + x$$

$$D_{11} f(x, y) = 6xy$$
$$D_{21} f(x, y) = 3x^2 + 1$$

Tweede-orde partiële afgeleides

Voorbeeld: bekijk $f(x,y) = x^3y + xy$. Dan is

$$D_1 f(x,y) = 3x^2y + y, \qquad D_2 f(x,y) = x^3 + x$$

$$D_{11} f(x,y) = 6xy \qquad D_{12} f(x,y)$$

$$D_{21} f(x,y) = 3x^2 + 1$$

Tweede-orde partiële afgeleides

Voorbeeld: bekijk $f(x,y) = x^3y + xy$. Dan is

$$D_1 f(x,y) = 3x^2y + y, \qquad D_2 f(x,y) = x^3 + x$$

$$D_{11} f(x,y) = 6xy \qquad D_{12} f(x,y) = 3x^2 + 1$$

$$D_{21} f(x,y) = 3x^2 + 1$$

Tweede-orde partiële afgeleides

Voorbeeld: bekijk $f(x, y) = x^3y + xy$. Dan is

$$D_1 f(x, y) = 3x^2y + y, \qquad D_2 f(x, y) = x^3 + x$$

$$D_{11} f(x, y) = 6xy \qquad D_{12} f(x, y) = 3x^2 + 1$$

$$D_{21} f(x, y) = 3x^2 + 1 \qquad D_{22} f(x, y)$$

Tweede-orde partiële afgeleides

Voorbeeld: bekijk $f(x, y) = x^3y + xy$. Dan is

$$D_1f(x, y) = 3x^2y + y, \qquad D_2f(x, y) = x^3 + x$$

$$D_{11}f(x, y) = 6xy \qquad D_{12}f(x, y) = 3x^2 + 1$$
$$D_{21}f(x, y) = 3x^2 + 1 \qquad D_{22}f(x, y) = 0.$$

Tweede-orde partiële afgeleides

Voorbeeld: bekijk $f(x, y) = x^3y + xy$. Dan is

$$D_1 f(x, y) = 3x^2y + y, \qquad D_2 f(x, y) = x^3 + x$$

$$\begin{aligned} D_{11} f(x, y) &= 6xy & D_{12} f(x, y) &= 3x^2 + 1 \\ D_{21} f(x, y) &= 3x^2 + 1 & D_{22} f(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

We zien $D_{12} f = D_{21} f$

Tweede-orde partiële afgeleides

Voorbeeld: bekijk $f(x, y) = x^3y + xy$. Dan is

$$D_1f(x, y) = 3x^2y + y, \qquad D_2f(x, y) = x^3 + x$$

$$D_{11}f(x, y) = 6xy \qquad D_{12}f(x, y) = 3x^2 + 1$$
$$D_{21}f(x, y) = 3x^2 + 1 \qquad D_{22}f(x, y) = 0.$$

We zien $D_{12}f = D_{21}f$: de volgorde van differentiëren maakt niet uit.

Tweede-orde partiële afgeleides

Voorbeeld: bekijk $f(x, y) = x^3y + xy$. Dan is

$$D_1f(x, y) = 3x^2y + y, \qquad D_2f(x, y) = x^3 + x$$

$$\begin{aligned} D_{11}f(x, y) &= 6xy & D_{12}f(x, y) &= 3x^2 + 1 \\ D_{21}f(x, y) &= 3x^2 + 1 & D_{22}f(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

We zien $D_{12}f = D_{21}f$: de volgorde van differentiëren maakt niet uit. Dit is meestal, maar niet altijd, waar:

Tweede-orde partiële afgeleides

Voorbeeld: bekijk $f(x,y) = x^3y + xy$. Dan is

$$D_1 f(x,y) = 3x^2y + y, \qquad D_2 f(x,y) = x^3 + x$$

$$D_{11} f(x,y) = 6xy \qquad D_{12} f(x,y) = 3x^2 + 1$$
$$D_{21} f(x,y) = 3x^2 + 1 \qquad D_{22} f(x,y) = 0.$$

We zien $D_{12}f = D_{21}f$: de volgorde van differentiëren maakt niet uit. Dit is meestal, maar niet altijd, waar:

Stelling 11.13

Zij $E \subseteq \mathbb{R}^n$ open en $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-afbeelding. Dan geldt voor alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ en voor alle $\vec{\mathbf{a}} \in E$ dat

$$D_{ij} f(\vec{\mathbf{a}}) = D_{ji}(\vec{\mathbf{a}}).$$

Omwisselen van afgeleides

Propositie 11.11

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $(a, b) \in E$. Dan geldt $D_{12}f(a, b) = D_{21}f(a, b)$.

Omwisselen van afgeleides

Propositie 11.11

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $(a,b) \in E$. Dan geldt $D_{12}f(a,b) = D_{21}f(a,b)$.

- Neem (h,k) klein en bekijk

$$\Delta = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b)$$

Omwisselen van afgeleides

Propositie 11.11

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $(a, b) \in E$. Dan geldt $D_{12}f(a, b) = D_{21}f(a, b)$.

- Neem (h, k) klein en bekijk

$$\begin{aligned}\Delta &= f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b)\\ &= g(a+h) - g(a)\end{aligned}$$

Omwisselen van afgeleides

Propositie 11.11

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $(a, b) \in E$. Dan geldt $D_{12}f(a, b) = D_{21}f(a, b)$.

- Neem (h, k) klein en bekijk

$$\begin{aligned}\Delta = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b) \\ = g(a+h) - g(a)\end{aligned}$$

met $g(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$

Omwisselen van afgeleides

Propositie 11.11

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $(a,b) \in E$. Dan geldt $D_{12}f(a,b) = D_{21}f(a,b)$.

- Neem (h,k) klein en bekijk

$$\begin{aligned}\Delta = f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b) \\ = g(a+h) - g(a) \\ = g'(\xi_1)h\end{aligned}$$

met $g(x) = f(x,b+k) - f(x,b)$

Omwisselen van afgeleides

Propositie 11.11

Zij $f: E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $(a,b) \in E$. Dan geldt $D_{12}f(a,b) = D_{21}f(a,b)$.

- Neem (h,k) klein en bekijk

$$\begin{aligned}\Delta = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a,b)\\ = g(a+h) - g(a)\\ = g'(\xi_1)h\end{aligned}$$

met $g(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$, voor zekere $\xi_1 \in (a, a+h)$.

Omwisselen van afgeleides

Propositie 11.11

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $(a, b) \in E$. Dan geldt $D_{12}f(a, b) = D_{21}f(a, b)$.

- Neem (h, k) klein en bekijk

$$\begin{aligned}\Delta = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b) \\ = g(a+h) - g(a) \\ = g'(\xi_1)h = \big(D_1 f(\xi_1, b+k) - D_1 f(\xi_1, b)\big)h\end{aligned}$$

met $g(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$, voor zekere $\xi_1 \in (a, a+h)$.

Omwisselen van afgeleides

Propositie 11.11

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $(a,b) \in E$. Dan geldt $D_{12}f(a,b) = D_{21}f(a,b)$.

- Neem (h,k) klein en bekijk

$$\begin{aligned}\Delta = f(a+h,b+k) &- f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b)\\ &= g(a+h) - g(a)\\ &= g'(\xi_1)h = \big(D_1f(\xi_1,b+k) - D_1f(\xi_1,b)\big)h\end{aligned}$$

  met $g(x) = f(x,b+k) - f(x,b)$, voor zekere $\xi_1 \in (a,a+h)$.
- Net zo is $D_1f(\xi_1,b+k) - D_1f(\xi_1,b)$

Omwisselen van afgeleides

Propositie 11.11

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $(a,b) \in E$. Dan geldt $D_{12}f(a,b) = D_{21}f(a,b)$.

- Neem (h,k) klein en bekijk

$$\begin{aligned}\Delta = f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b)\\ &= g(a+h) - g(a)\\ &= g'(\xi_1)h = \big(D_1 f(\xi_1, b+k) - D_1 f(\xi_1, b)\big)h\end{aligned}$$

  met $g(x) = f(x,b+k) - f(x,b)$, voor zekere $\xi_1 \in (a, a+h)$.
- Net zo is $D_1 f(\xi_1, b+k) - D_1 f(\xi_1, b) = D_{21} f(\xi_1, \xi_2) k$

Omwisselen van afgeleides

Propositie 11.11

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $(a,b) \in E$. Dan geldt $D_{12}f(a,b) = D_{21}f(a,b)$.

- Neem (h,k) klein en bekijk

$$\begin{aligned}\Delta = f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b) \\ &= g(a+h) - g(a) \\ &= g'(\xi_1)h = \big(D_1f(\xi_1,b+k) - D_1f(\xi_1,b)\big)h\end{aligned}$$

  met $g(x) = f(x,b+k) - f(x,b)$, voor zekere $\xi_1 \in (a,a+h)$.
- Net zo is $D_1f(\xi_1,b+k) - D_1f(\xi_1,b) = D_{21}f(\xi_1,\xi_2)k$ met $\xi_2 \in (b,b+k)$.

Omwisselen van afgeleides

Propositie 11.11

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $(a, b) \in E$. Dan geldt $D_{12}f(a, b) = D_{21}f(a, b)$.

- Neem (h, k) klein en bekijk

$$\begin{aligned}\Delta = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b)\\ &= g(a+h) - g(a)\\ &= g'(\xi_1)h = \big(D_1f(\xi_1, b+k) - D_1f(\xi_1, b)\big)h\end{aligned}$$

  met $g(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$, voor zekere $\xi_1 \in (a, a+h)$.
- Net zo is $D_1f(\xi_1, b+k) - D_1f(\xi_1, b) = D_{21}f(\xi_1, \xi_2)k$ met $\xi_2 \in (b, b+k)$.
- We zien $\Delta = D_{21}f(\xi_1, \xi_2)hk$.

Omwisselen van afgeleides

Propositie 11.11

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $(a,b) \in E$. Dan geldt $D_{12}f(a,b) = D_{21}f(a,b)$.

- Neem (h,k) klein en bekijk

$$\begin{aligned}\Delta = f(a+h,b+k) &- f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b)\\ &= g(a+h) - g(a)\\ &= g'(\xi_1)h = \big(D_1f(\xi_1,b+k) - D_1f(\xi_1,b)\big)h\end{aligned}$$

  met $g(x) = f(x,b+k) - f(x,b)$, voor zekere $\xi_1 \in (a,a+h)$.
- Net zo is $D_1f(\xi_1,b+k) - D_1f(\xi_1,b) = D_{21}f(\xi_1,\xi_2)k$ met $\xi_2 \in (b,b+k)$.
- We zien $\Delta = D_{21}f(\xi_1,\xi_2)hk$.
- We kunnen deze redering herhalen in de omgekeerde volgorde

Omwisselen van afgeleides

Propositie 11.11

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $(a,b) \in E$. Dan geldt $D_{12}f(a,b) = D_{21}f(a,b)$.

- Neem (h,k) klein en bekijk

$$\begin{aligned}\Delta = f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b) \\ &= g(a+h) - g(a) \\ &= g'(\xi_1)h = \big(D_1 f(\xi_1, b+k) - D_1 f(\xi_1, b)\big)h\end{aligned}$$

  met $g(x) = f(x,b+k) - f(x,b)$, voor zekere $\xi_1 \in (a, a+h)$.
- Net zo is $D_1 f(\xi_1, b+k) - D_1 f(\xi_1, b) = D_{21} f(\xi_1, \xi_2)k$ met $\xi_2 \in (b, b+k)$.
- We zien $\Delta = D_{21} f(\xi_1, \xi_2)hk$.
- We kunnen deze redering herhalen in de omgekeerde volgorde om in te zien dat $\Delta = D_{12} f(\eta_1, \eta_2)kh$

Omwisselen van afgeleides

Propositie 11.11

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $(a,b) \in E$. Dan geldt $D_{12}f(a,b) = D_{21}f(a,b)$.

- Neem (h,k) klein en bekijk

$$\begin{aligned}\Delta = f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b) \\ &= g(a+h) - g(a) \\ &= g'(\xi_1)h = \big(D_1 f(\xi_1, b+k) - D_1 f(\xi_1, b)\big)h\end{aligned}$$

  met $g(x) = f(x,b+k) - f(x,b)$, voor zekere $\xi_1 \in (a, a+h)$.
- Net zo is $D_1 f(\xi_1, b+k) - D_1 f(\xi_1, b) = D_{21} f(\xi_1, \xi_2)k$ met $\xi_2 \in (b, b+k)$.
- We zien $\Delta = D_{21} f(\xi_1, \xi_2)hk$.
- We kunnen deze redering herhalen in de omgekeerde volgorde om in te zien dat $\Delta = D_{12} f(\eta_1, \eta_2)kh$ voor zekere $\eta_1 \in (a, a+h)$ en $\eta_2 \in (b, b+k)$.

Omwisselen van afgeleides

Propositie 11.11

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $(a,b) \in E$. Dan geldt $D_{12}f(a,b) = D_{21}f(a,b)$.

- Neem (h,k) klein en bekijk

$$\begin{aligned}\Delta = f(a+h,b+k) &- f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b)\\ &= g(a+h) - g(a)\\ &= g'(\xi_1)h = \big(D_1f(\xi_1,b+k) - D_1f(\xi_1,b)\big)h\end{aligned}$$

  met $g(x) = f(x,b+k) - f(x,b)$, voor zekere $\xi_1 \in (a,a+h)$.
- Net zo is $D_1f(\xi_1,b+k) - D_1f(\xi_1,b) = D_{21}f(\xi_1,\xi_2)k$ met $\xi_2 \in (b,b+k)$.
- We zien $\Delta = D_{21}f(\xi_1,\xi_2)hk$.
- We kunnen deze redering herhalen in de omgekeerde volgorde om in te zien dat $\Delta = D_{12}f(\eta_1,\eta_2)kh$ voor zekere $\eta_1 \in (a,a+h)$ en $\eta_2 \in (b,b+k)$.
- Dus $D_{21}f(\xi_1,\xi_2) = D_{12}f(\eta_1,\eta_2)$ voor deze $\eta_1,\eta_2,\xi_1,\xi_2$.

Omwisselen van afgeleides

Propositie 11.11

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $(a,b) \in E$. Dan geldt $D_{12}f(a,b) = D_{21}f(a,b)$.

- Neem (h,k) klein en bekijk
$$\begin{aligned}\Delta = f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b)\\ = g(a+h) - g(a)\\ = g'(\xi_1)h = \big(D_1f(\xi_1,b+k) - D_1f(\xi_1,b)\big)h\end{aligned}$$
met $g(x) = f(x,b+k) - f(x,b)$, voor zekere $\xi_1 \in (a,a+h)$.
- Net zo is $D_1f(\xi_1,b+k) - D_1f(\xi_1,b) = D_{21}f(\xi_1,\xi_2)k$ met $\xi_2 \in (b,b+k)$.
- We zien $\Delta = D_{21}f(\xi_1,\xi_2)hk$.
- We kunnen deze redering herhalen in de omgekeerde volgorde om in te zien dat $\Delta = D_{12}f(\eta_1,\eta_2)kh$ voor zekere $\eta_1 \in (a,a+h)$ en $\eta_2 \in (b,b+k)$.
- Dus $D_{21}f(\xi_1,\xi_2) = D_{12}f(\eta_1,\eta_2)$ voor deze $\eta_1,\eta_2,\xi_1,\xi_2$.
- Laat nu $h,k \to 0$

Omwisselen van afgeleides

Propositie 11.11

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $(a,b) \in E$. Dan geldt $D_{12}f(a,b) = D_{21}f(a,b)$.

- Neem (h,k) klein en bekijk

$$\begin{aligned}\Delta = f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b) \\ &= g(a+h) - g(a) \\ &= g'(\xi_1)h = \big(D_1 f(\xi_1, b+k) - D_1 f(\xi_1, b)\big)h\end{aligned}$$

  met $g(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$, voor zekere $\xi_1 \in (a, a+h)$.
- Net zo is $D_1 f(\xi_1, b+k) - D_1 f(\xi_1, b) = D_{21} f(\xi_1, \xi_2)k$ met $\xi_2 \in (b, b+k)$.
- We zien $\Delta = D_{21} f(\xi_1, \xi_2)hk$.
- We kunnen deze redering herhalen in de omgekeerde volgorde om in te zien dat $\Delta = D_{12} f(\eta_1, \eta_2)kh$ voor zekere $\eta_1 \in (a, a+h)$ en $\eta_2 \in (b, b+k)$.
- Dus $D_{21} f(\xi_1, \xi_2) = D_{12} f(\eta_1, \eta_2)$ voor deze $\eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2$.
- Laat nu $h, k \to 0$ zodat $\xi_1, \eta_1 \to a$ en $\xi_2, \eta_2 \to b$.

Omwisselen van afgeleides

Propositie 11.11

Zij $f: E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $(a, b) \in E$. Dan geldt $D_{12}f(a, b) = D_{21}f(a, b)$.

- Neem (h, k) klein en bekijk

$$\begin{aligned}\Delta = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b) \\ &= g(a+h) - g(a) \\ &= g'(\xi_1)h = \big(D_1 f(\xi_1, b+k) - D_1 f(\xi_1, b)\big)h\end{aligned}$$

  met $g(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$, voor zekere $\xi_1 \in (a, a+h)$.
- Net zo is $D_1 f(\xi_1, b+k) - D_1 f(\xi_1, b) = D_{21}f(\xi_1, \xi_2)k$ met $\xi_2 \in (b, b+k)$.
- We zien $\Delta = D_{21}f(\xi_1, \xi_2)hk$.
- We kunnen deze redering herhalen in de omgekeerde volgorde om in te zien dat $\Delta = D_{12}f(\eta_1, \eta_2)kh$ voor zekere $\eta_1 \in (a, a+h)$ en $\eta_2 \in (b, b+k)$.
- Dus $D_{21}f(\xi_1, \xi_2) = D_{12}f(\eta_1, \eta_2)$ voor deze $\eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2$.
- Laat nu $h, k \to 0$ zodat $\xi_1, \eta_1 \to a$ en $\xi_2, \eta_2 \to b$.
- Vanwege continuïteit van D_{21} en D_{12}

Omwisselen van afgeleides

Propositie 11.11

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $(a,b) \in E$. Dan geldt $D_{12}f(a,b) = D_{21}f(a,b)$.

- Neem (h,k) klein en bekijk

$$\begin{aligned}\Delta = f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b) \\ &= g(a+h) - g(a) \\ &= g'(\xi_1)h = \big(D_1 f(\xi_1, b+k) - D_1 f(\xi_1, b)\big)h\end{aligned}$$

  met $g(x) = f(x,b+k) - f(x,b)$, voor zekere $\xi_1 \in (a, a+h)$.
- Net zo is $D_1 f(\xi_1, b+k) - D_1 f(\xi_1, b) = D_{21} f(\xi_1, \xi_2)k$ met $\xi_2 \in (b, b+k)$.
- We zien $\Delta = D_{21} f(\xi_1, \xi_2)hk$.
- We kunnen deze redering herhalen in de omgekeerde volgorde om in te zien dat $\Delta = D_{12} f(\eta_1, \eta_2)kh$ voor zekere $\eta_1 \in (a, a+h)$ en $\eta_2 \in (b, b+k)$.
- Dus $D_{21} f(\xi_1, \xi_2) = D_{12} f(\eta_1, \eta_2)$ voor deze $\eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2$.
- Laat nu $h, k \to 0$ zodat $\xi_1, \eta_1 \to a$ en $\xi_2, \eta_2 \to b$.
- Vanwege continuïteit van D_{21} en D_{12} volgt $D_{21} f(a,b) = D_{12} f(a,b)$.

Integraal en afgeleide

Zij $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie.

Integraal en afgeleide

Zij $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Definieer voor zekere $a, b \in \mathbb{R}$ de functie

$$F(x) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Integraal en afgeleide

Zij $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Definieer voor zekere $a, b \in \mathbb{R}$ de functie

$$F(x) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Is dan F differentieerbaar?

Integraal en afgeleide

Zij $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Definieer voor zekere $a, b \in \mathbb{R}$ de functie

$$F(x) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Is dan F differentieerbaar met $F'(x) = \int_a^b D_1 f(x, y)\,\mathrm{d}y$?

Integraal en afgeleide

Zij $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Definieer voor zekere $a, b \in \mathbb{R}$ de functie

$$F(x) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Is dan F differentieerbaar met $F'(x) = \int_a^b D_1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$? Er geldt

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_a^b D_1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Integraal en afgeleide

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Definieer voor zekere $a, b \in \mathbb{R}$ de functie

$$F(x) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Is dan F differentieerbaar met $F'(x) = \int_a^b D_1 f(x, y)\,\mathrm{d}y$? Er geldt

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_a^b D_1 f(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} - D_1 f(x, y) \right] \mathrm{d}y$$

Integraal en afgeleide

Zij $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Definieer voor zekere $a, b \in \mathbb{R}$ de functie

$$F(x) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Is dan F differentieerbaar met $F'(x) = \int_a^b D_1 f(x, y)\,\mathrm{d}y$? Er geldt

$$\begin{aligned}
\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_a^b D_1 f(x, y)\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \left[\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} - D_1 f(x, y)\right] \mathrm{d}y \\
&= \int_a^b \left[D_1 f(\xi_y, y) - D_1 f(x, y)\right] \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Integraal en afgeleide

Zij $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Definieer voor zekere $a, b \in \mathbb{R}$ de functie

$$F(x) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Is dan F differentieerbaar met $F'(x) = \int_a^b D_1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$? Er geldt

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_a^b D_1 f(x,y)\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \left[\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} - D_1 f(x,y)\right]\,\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \left[D_1 f(\xi_y, y) - D_1 f(x,y)\right]\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

waar $\xi_y \in (x, x+h)$.

Integraal en afgeleide

Zij $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Definieer voor zekere $a, b \in \mathbb{R}$ de functie

$$F(x) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Is dan F differentieerbaar met $F'(x) = \int_a^b D_1 f(x, y)\,\mathrm{d}y$? Er geldt

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_a^b D_1 f(x, y)\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \left[\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} - D_1 f(x, y)\right]\,\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \left[D_1 f(\xi_y, y) - D_1 f(x, y)\right]\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

waar $\xi_y \in (x, x+h)$. Als nu $D_1 f$ continu is

Integraal en afgeleide

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Definieer voor zekere $a, b \in \mathbb{R}$ de functie

$$F(x) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Is dan F differentieerbaar met $F'(x) = \int_a^b D_1 f(x, y)\,\mathrm{d}y$? Er geldt

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_a^b D_1 f(x, y)\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \left[\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} - D_1 f(x, y)\right]\,\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \left[D_1 f(\xi_y, y) - D_1 f(x, y)\right]\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

waar $\xi_y \in (x, x+h)$. Als nu $D_1 f$ continu is, dan is hij uniform continu op de compacte verzameling $F := [x, x+h] \times [a, b]$

Integraal en afgeleide

Zij $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Definieer voor zekere $a, b \in \mathbb{R}$ de functie

$$F(x) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Is dan F differentieerbaar met $F'(x) = \int_a^b D_1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$? Er geldt

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_a^b D_1 f(x,y)\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \left[\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} - D_1 f(x,y)\right]\,\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \left[D_1 f(\xi_y, y) - D_1 f(x,y)\right]\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

waar $\xi_y \in (x, x+h)$. Als nu $D_1 f$ continu is, dan is hij uniform continu op de compacte verzameling $F := [x, x+h] \times [a, b]$, dus bestaat er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ zodat

$$d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) < \delta \quad \Rightarrow \quad \big|D_1 f(x_1,y_1) - D_1 f(x_2,y_2)\big| < \epsilon$$

Integraal en afgeleide

Zij $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Definieer voor zekere $a, b \in \mathbb{R}$ de functie

$$F(x) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Is dan F differentieerbaar met $F'(x) = \int_a^b D_1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$? Er geldt

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_a^b D_1 f(x,y)\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \left[\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} - D_1 f(x,y)\right]\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \left[D_1 f(\xi_y, y) - D_1 f(x,y)\right]\mathrm{d}y\end{aligned}$$

waar $\xi_y \in (x, x+h)$. Als nu $D_1 f$ continu is, dan is hij uniform continu op de compacte verzameling $F := [x, x+h] \times [a,b]$, dus bestaat er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ zodat

$$d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) < \delta \quad \Rightarrow \quad \big|D_1 f(x_1,y_1) - D_1 f(x_2,y_2)\big| < \epsilon$$

op heel F.

Integraal en afgeleide

Zij $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Definieer voor zekere $a, b \in \mathbb{R}$ de functie

$$F(x) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Is dan F differentieerbaar met $F'(x) = \int_a^b D_1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$? Er geldt

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_a^b D_1 f(x,y)\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \left[\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} - D_1 f(x,y)\right]\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \left[D_1 f(\xi_y, y) - D_1 f(x,y)\right]\mathrm{d}y\end{aligned}$$

waar $\xi_y \in (x, x+h)$. Als nu $D_1 f$ continu is, dan is hij uniform continu op de compacte verzameling $F := [x, x+h] \times [a, b]$, dus bestaat er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ zodat

$$d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) < \delta \quad \Rightarrow \quad \big|D_1 f(x_1,y_1) - D_1 f(x_2,y_2)\big| < \epsilon$$

op heel F. Dus als $|h| < \delta$, dan is

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_a^b D_1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right|$$

Integraal en afgeleide

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Definieer voor zekere $a, b \in \mathbb{R}$ de functie

$$F(x) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Is dan F differentieerbaar met $F'(x) = \int_a^b D_1 f(x, y)\,\mathrm{d}y$? Er geldt

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_a^b D_1 f(x, y)\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \left[\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} - D_1 f(x, y)\right]\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \left[D_1 f(\xi_y, y) - D_1 f(x, y)\right]\mathrm{d}y\end{aligned}$$

waar $\xi_y \in (x, x+h)$. Als nu $D_1 f$ continu is, dan is hij uniform continu op de compacte verzameling $F := [x, x+h] \times [a, b]$, dus bestaat er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ zodat

$$d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) < \delta \quad \Rightarrow \quad \big|D_1 f(x_1, y_1) - D_1 f(x_2, y_2)\big| < \epsilon$$

op heel F. Dus als $|h| < \delta$, dan is

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_a^b D_1 f(x, y)\,\mathrm{d}y\right| \leq \int_a^b \epsilon\,\mathrm{d}y$$

Integraal en afgeleide

Zij $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Definieer voor zekere $a, b \in \mathbb{R}$ de functie

$$F(x) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Is dan F differentieerbaar met $F'(x) = \int_a^b D_1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$? Er geldt

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_a^b D_1 f(x,y)\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \left[\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} - D_1 f(x,y)\right]\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \left[D_1 f(\xi_y,y) - D_1 f(x,y)\right]\mathrm{d}y\end{aligned}$$

waar $\xi_y \in (x, x+h)$. Als nu $D_1 f$ continu is, dan is hij uniform continu op de compacte verzameling $F := [x, x+h] \times [a, b]$, dus bestaat er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ zodat

$$d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) < \delta \quad \Rightarrow \quad \big|D_1 f(x_1,y_1) - D_1 f(x_2,y_2)\big| < \epsilon$$

op heel F. Dus als $|h| < \delta$, dan is

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_a^b D_1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right| \le \int_a^b \epsilon\,\mathrm{d}y = (b-a)\epsilon.$$

Integraal en afgeleide

Zij $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Definieer voor zekere $a, b \in \mathbb{R}$ de functie

$$F(x) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Is dan F differentieerbaar met $F'(x) = \int_a^b D_1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$? Er geldt

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_a^b D_1 f(x,y)\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \left[\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} - D_1 f(x,y)\right]\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \left[D_1 f(\xi_y,y) - D_1 f(x,y)\right]\mathrm{d}y\end{aligned}$$

waar $\xi_y \in (x, x+h)$. Als nu $D_1 f$ continu is, dan is hij uniform continu op de compacte verzameling $F := [x, x+h] \times [a,b]$, dus bestaat er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ zodat

$$d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) < \delta \quad \Rightarrow \quad \big|D_1 f(x_1,y_1) - D_1 f(x_2,y_2)\big| < \epsilon$$

op heel F. Dus als $|h| < \delta$, dan is

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_a^b D_1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right| \le \int_a^b \epsilon\,\mathrm{d}y = (b-a)\epsilon.$$

Aangezien ϵ willekeurig is, zien we dat $\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \int_a^b D_1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

Integraal en afgeleide

Propositie 11.14

Zij $f\colon I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ een C^1 functie, waar $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ intervallen zijn. Neem $[a, b] \subseteq I_2$ en definieer

$$F(x) = \int_a^b f(x, y)\, \mathrm{d}y$$

voor $x \in I_1$. Dan is F differentieerbaar op I_1 met

$$F'(x) = \int_a^b D_1 f(x, y)\, \mathrm{d}y.$$