

Analyse: van \mathbb{R} naar \mathbb{R}^n hoorcollege

Taylor in \mathbb{R}^n (19)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam



Polynomen in meer variabelen

Een tweedegraadspolynoom op de \mathbb{R}^2 ziet er uit als

$$P(x_1, x_2) = a_{0,0} + a_{1,0}x_1 + a_{0,1}x_2 + a_{1,1}x_1x_2 + a_{2,0}x_1^2 + a_{0,2}x_2^2$$

of compacter

$$P(x_1, x_2) = \sum_{j_1+j_2 \leq 2} a_{j_1, j_2} x_1^{j_1} x_2^{j_2}.$$

Meer algemeen is een k -degraads polynoom op \mathbb{R}^n van de vorm

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j_1+\dots+j_n \leq k} a_{j_1, \dots, j_n} x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}.$$

Merk op dat geldt $D_1^{j_1} \dots D_n^{j_n} P(\vec{0}) = j_1! \dots j_n! a_{j_1, \dots, j_n}$. Dit suggereert dat we een C^k functie f kunnen proberen te benaderen met

$$T_k(\vec{x}) = \sum_{j_1+\dots+j_n \leq k} \frac{D_1^{j_1} \dots D_n^{j_n} f(\vec{0})}{j_1! \dots j_n!} x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}.$$

Taylorreeksen in \mathbb{R}

Zij $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een C^p functie. Dan is

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)h^2}{2} + \dots + \frac{f^{(p-1)}(0)h^{p-1}}{(p-1)!} + R_p(h),$$

waar $R_p(h) = \frac{f^{(p)}(\theta)h^p}{p!}$ voor zekere θ tussen 0 en h .

Meer algemeen hebben we voor $a \in \mathbb{R}$ dat

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2} + \dots + \frac{f^{(p-1)}(a)h^{p-1}}{(p-1)!} + R_p(h)$$

met $R_p(h) = \frac{f^{(p)}(\theta)h^p}{p!}$ voor zekere θ tussen a en $a+h$. Als gevolg hiervan zien we

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + O(|h|^p).$$

Taylor naar meer dimensies

Zij $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ een C^p -functie. Definieer $g(t) = f(\vec{a} + t\vec{h})$. Dan is $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met

$$g'(t) = f'(\vec{a} + t\vec{h})\vec{h} = \sum_{j=1}^n (D_j f)(\vec{a} + t\vec{h}) h_j$$

en

$$\begin{aligned} g''(t) &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} (D_j f)(\vec{a} + t\vec{h}) \right] h_j = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^n (D_i D_j f)(\vec{a} + t\vec{h}) h_i \right] h_j \\ &= \sum_{i,j=1}^n (D_{ij} f)(\vec{a} + t\vec{h}) h_i h_j. \end{aligned}$$

Zo gaan we verder:

$$g^{(k)}(t) = \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n (D_{j_1 \dots j_k} f)(\vec{a} + t\vec{h}) h_{j_1} \dots h_{j_k} \quad \text{voor } k \leq p.$$

Taylor naar meer dimensies

Zij $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ een C^p -functie. Definieer $g(t) = f(\vec{a} + t\vec{h})$. Dan is $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met

$$g^{(k)}(t) = \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n (D_{j_1 \dots j_k} f)(\vec{a} + t\vec{h}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \quad \text{voor } k \leq p.$$

Taylor toepassen op g geeft

$$g(1) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + R_p(1) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n (D_{j_1 \dots j_k} f)(\vec{a}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \right) + R_p(1),$$

waar er $\theta \in (0, 1)$ is zodat

$$R_p(1) = \frac{g^{(p)}(\theta)}{p!} = \frac{1}{p!} \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^n (D_{j_1 \dots j_p} f)(\vec{a} + \theta\vec{h}) h_{j_1} \cdots h_{j_p} =: R_p(\vec{h})$$

We hebben dus bewezen dat

$$f(\vec{a} + \vec{h}) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n (D_{j_1 \dots j_k} f)(\vec{a}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \right) + R_p(\vec{h}).$$

Taylor in \mathbb{R}

Zij $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een C^p functie. Dan is er voor elke h een $\theta \in (0, h)$ zodat

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)h^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(p-1)}(0)h^{p-1}}{(p-1)!} + \frac{f^{(p)}(\theta)}{p!}.$$

Herordenen van termen

Bekijk

$$\sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n (D_{j_1 \dots j_k} f)(\vec{a}) h_{j_1} \cdots h_{j_k}$$

Een term van deze som ziet eruit als

$$(D_1^{k_1} \cdots D_n^{k_n} f)(\vec{a}) h_1^{k_1} \cdots h_n^{k_n},$$

waar $k_1 + \cdots + k_n = k$. We krijgen zo'n term meerdere keren, want de volgorde van de afgeleides maakt niet uit en evenmin de volgorde van de h_i . Bovenstaande term komt $\frac{k!}{k_1! \cdots k_n!}$ voor, dus

$$\sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n (D_{j_1 \dots j_k} f)(\vec{a}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} = \sum_{k_1 + \cdots + k_n = k} \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!} (D_1^{k_1} \cdots D_n^{k_n} f)(\vec{a}) h_1^{k_1} \cdots h_n^{k_n}.$$

Taylor in meer dimensies

Stelling van Taylor op \mathbb{R}^n , lelijke variant (12.6)

Zij $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ een C^p -functie en $a \in E$. Dan geldt

$$f(\vec{a} + \vec{h}) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n (D_{j_1 \dots j_k} f)(\vec{a}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \right) + R_p(\vec{h}),$$

waar er $\theta \in (0, 1)$ bestaat zodat

$$R_p(\vec{h}) = \frac{1}{p!} \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^n (D_{j_1 \dots j_p} f)(\vec{a} + \theta\vec{h}) h_{j_1} \cdots h_{j_p}.$$

Merk op dat voor een C^p functie de afgeleides $D_{j_1 \dots j_p} f$ begrensd zijn rond \vec{a} , dus

$$|R_p(\vec{h})| \leq C \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^n |h_{j_1} \cdots h_{j_p}| \leq C \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^n \|\vec{h}\|^p = C n^p \|\vec{h}\|^p = O(\|\vec{h}\|^p).$$

Termen herordend

We herschrijven nu de Taylorbenadering:

$$\begin{aligned} f(\vec{a} + \vec{h}) &= \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n (D_{j_1 \dots j_k} f)(\vec{a}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \right) + R_p(\vec{h}) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} \left(\sum_{k_1 + \cdots + k_n = k} \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!} (D_1^{k_1} \cdots D_n^{k_n} f)(\vec{a}) h_1^{k_1} \cdots h_n^{k_n} \right) + R_p(\vec{h}) \\ &= \sum_{k_1 + \cdots + k_n \leq p-1} \frac{(D_1^{k_1} \cdots D_n^{k_n} f)(\vec{a})}{k_1! \cdots k_n!} h_1^{k_1} \cdots h_n^{k_n} + R_p(\vec{h}) \end{aligned}$$

Stelling van Taylor, variant 2

Zij $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ een C^p -functie en $a \in E$. Dan geldt

$$f(\vec{a} + \vec{h}) = \sum_{k_1 + \cdots + k_n \leq p-1} \frac{(D_1^{k_1} \cdots D_n^{k_n} f)(\vec{a})}{k_1! \cdots k_n!} h_1^{k_1} \cdots h_n^{k_n} + O(\|\vec{h}\|^p).$$