OPGAVEN BIJ ANALYSE 2015, STELLING VAN TAYLOR (19)

Resultaten

Stelling (Taylor 1). *Laat $E \subseteq \mathbb{R}^n$ en $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^p-functie. Voor $\vec{a} \in E$ geldt*

$$f(\vec{a}+\vec{h}) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{a}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \right) + R_p(\vec{h}),$$

waar er $\theta \in (0,1)$ bestaat zodat

$$R_p(\vec{h}) = \frac{1}{p!} \sum_{j_1,\dots,j_p=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_p} f)(\vec{a}+\theta\vec{h}) h_{j_1} \cdots h_{j_p}.$$

Stelling (Taylor 2). *Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^p-functie en $a \in E$. Dan geldt*

$$f(\vec{a}+\vec{h}) = \sum_{k_1+\cdots+k_n \le p-1} \frac{(D_1^{k_1} \cdots D_n^{k_n} f)(\vec{a})}{k_1! \cdots k_n!} h_1^{k_1} \cdots h_n^{k_n} + O(\|\vec{h}\|^p).$$

Opgaven

Opgave 1. Geef het Taylorpolynoom van graad 3 in het punt $(0,0,1)$ van de functies $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeven door

(a) $f(x,y,z) = xyz$
(b) $f(x,y,z) = x^2 \cos y - e^z \sin(x+y)$

Controleer je antwoord aan de hand van beide varianten van de Stelling van Taylor.

Opgave 2. Voor de volgende functies $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en punten $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$, bepaal een polynoom P met maximaal graad 2 zo dat $f(\vec{x}) = P(\vec{x}) + O(\|\vec{x}-\vec{a}\|^3)$.

(a) $f(x,y) = x^2 y$ met $a = (1,-1)$
(b) $f(x,y) = e^x \sin y$ met $a = (0,0)$
(c) $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$ met $a = (0,0)$
(d) $f(x,y) = 1/(1-x+y)$ met $a = (1,1)$.

Opgave 3. Zij $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ voor $(x,y) \neq (0,0)$ en $f(0,0) = 0$. Bewijs dat f een C^∞-functie is op $\mathbb{R}^2$. Bepaal het Taylorpolynoom van f van orde n.

Opgave 4. Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een C^p functie. Volgens Taylor geldt

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^p + O(h^p).$$

Gebruik de precieze vorm van de restterm om te bewijzen dat zelfs geldt

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^p + o(h^p).$$

Opgave 5. Generaliseer dit naar $\mathbb{R}^n$: bewijs dat voor een C^p-functie $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ geldt

$$f(\vec{a}+\vec{h}) = \sum_{k=0}^{p} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{a}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \right) + o(\|\vec{h}\|^p).$$