Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

Convergentie van reeksen

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

Analyse op de lijn: limieten van rijen

Gezien: een rij (s_n) van reële getallen convergeert naar s als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N.$$

In $\mathbb{R}$ convergeert een rij desda de rij Cauchy is:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s_m| < \epsilon \quad \text{als} \quad n, m > N.$$

Een monotone rij heeft altijd een limiet (mogelijk $\pm\infty$). Een willekeurige rij hoeft niet te convergeren, maar voor elke rij bestaan

$$\limsup_{n\to\infty} s_n := \lim_{N\to\infty} \sup_{n>N} s_n \qquad \text{en} \qquad \liminf_{n\to\infty} s_n := \lim_{N\to\infty} \inf_{n>N} s_n.$$

We schrijven ook wel

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n := \limsup_{n\to\infty} s_n, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n := \liminf_{n\to\infty} s_n.$$

Reeksen

We bekijken nu de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

Bijvoorbeeld

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1?$$

Wat betekent dit? Definiëer een rij (s_n) volgens

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

de rij van partiële sommen. Als $\lim_{n\to\infty} s_n = S$, schrijven we

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S, \qquad \text{oftewel} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Voorbeeld: meetkundige reeks

Bekijk

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \qquad \text{met} \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}.$$

Herinner dat

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Met $r = 1/2$ vinden we

$$s_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \qquad \text{zodat} \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = 2.$$

We zien dus $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$. Meer algemeen is

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r} \qquad \text{als } |r| < 1.$$

Reeksen en convergentie

Gegeven een reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zijn er twee logische vragen:

1. Convergeert de reeks?
2. Zo ja, wat is de waarde van de reeks?

We zullen ons in eerste instantie bezighouden met de eerste vraag, die ook meestal makkelijker is. Zo zullen we zien dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

maar is het lastiger te bewijzen dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Merk op: voor convergentie maakt het beginstuk niet uit, en dus ook niet waar je begint: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert desda $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ dat doet. Men schrijft $\sum a_n$ als de precieze ondergrens niet relevant is.

Cauchy criterium

Bekijk een reeks $\sum a_n$ met partiële sommen (s_n). We hebben

$$\sum a_n \text{ convergeert} \quad \Leftrightarrow \quad s_n \text{ convergeert} \quad \Leftrightarrow \quad s_n \text{ is Cauchy.}$$

Dit laatste geeft

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s_m| < \epsilon \quad \text{als} \quad n, m > N,$$

oftewel

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{m} a_k \right| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > m > N$$

en dus

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Deze voorwaarde voor convergentie heet het Cauchy criterium.

Convergentie volgens Cauchy

Cauchy criterium (Stelling 14.4)

Een reeks $\sum a_n$ convergeert desda hij voldoet aan het Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \epsilon \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Als we hier $m = n$ nemen zien we dat

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |a_n| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N,$$

dus $a_n \to 0$. Oftewel:

als een reeks convergeert, dan geldt $a_n \to 0$.

Dit geldt niet andersom: we zullen zien dat $\sum \frac{1}{n}$ niet convergeert.

Vergelijken

De makkelijkste manier om te zien of een reeks convergeert is om deze te vergelijken met een waarvan het gedrag bekend is:

Vergelijkingscriterium (14.6)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n.

1. Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n, dan convergeert $\sum b_n$ ook.

Bewijs van 1: Aan te tonen is dat

$$\left| \sum_{k=m}^{n} b_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |b_k| \leq \sum_{k=m}^{n} a_k$$

klein is. Dit volgt direct uit het feit dat $\sum a_k$ convergeert. □

Voorbeeld: $\sum \frac{1}{n^2+n}$ convergeert. Er geldt immers $\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2}$ en de reeks $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert.

Vergelijken

Vergelijkingscriterium (14.6, comparison test)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n.

1. Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n, dan convergeert $\sum b_n$ ook.
2. Als $\sum a_n = \infty$ en $b_n \geq a_n$ voor alle (grote) n, dan $\sum b_n = \infty$.

Bewijs van 2: we schrijven

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Dan geldt per aanname $t_n \geq s_n$, dus

$$\sum b_n = \lim_{n\to\infty} t_n \geq \lim_{n\to\infty} s_n = \sum a_n = \infty. \qquad \square$$

Voorbeeld: $\sum \frac{1}{n-1} = \infty$ want $\frac{1}{n-1} \geq \frac{1}{2n}$ en $\sum \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum \frac{1}{n} = \infty$.

Criteria voor convergentie

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

1. Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.
2. Als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks.

Stelling 12.2

Zij (a_n) een rij getallen ongelijk nul. Dan geldt

$$\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf |a_n|^{1/n} \leq \limsup |a_n|^{1/n} \leq \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Quotiëntcriterium (14.8, ratio test)

Zij $\sum a_n$ een reeks. Er geldt:

1. Als $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, dan convergeert $\sum a_n$.
2. Als $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, dan divergeert $\sum a_n$.

Criteria voor convergentie

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

1. Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.
2. Als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks.

Bewijs: merk op $\alpha = \lim_{N\to\infty} \sup_{n>N} |a_n|^{1/n}$.

1. Als $\alpha < 1$, dan is er $\epsilon > 0$ zodat $|a_n|^{1/n} < 1 - \epsilon$ voor voldoende grote n. Dus $|a_n| < (1-\epsilon)^n$. De reeks $\sum (1-\epsilon)^n$ convergeert, dus met het vergelijkingscriterium ook $\sum a_n$.
2. Als $\alpha > 1$, dan is $|a_n|^{1/n} > 1$ voor oneindig veel n. Maar dan geldt ook $|a_n| > 1$, dus geldt niet $a_n \to 0$. $\square$

Merk op: de test geeft geen informatie als $\alpha = 1$, bijv. bij reeksen als $\sum \frac{1}{n}$ en $\sum \frac{1}{n^2}$.