Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

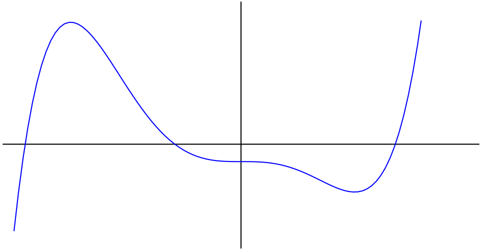
Extrema in $\mathbb{R}^n$ (21)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

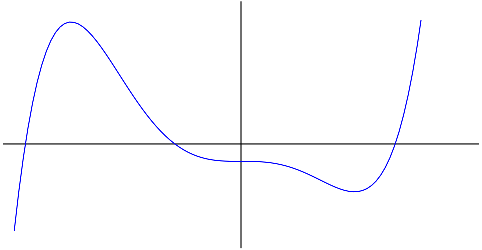
Extrema in $\mathbb{R}$

Bekijk een C^2-functie $f\colon E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}$ open.



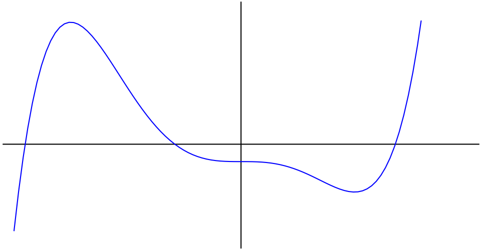
Extrema in $\mathbb{R}$

Bekijk een C^2-functie $f\colon E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}$ open. We zeggen dat f een lokaal maximum heeft in a



Extrema in $\mathbb{R}$

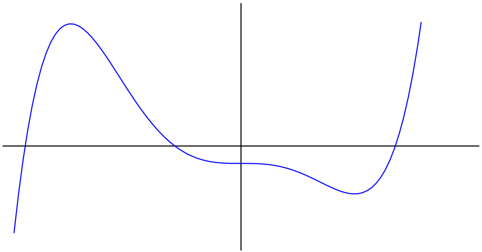
Bekijk een C^2-functie $f\colon E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}$ open. We zeggen dat f een lokaal maximum heeft in a als er een $\delta > 0$ bestaat zodat voor alle $x \in (a-\delta, a+\delta)$ geldt $f(x) \leq f(a)$.



Extrema in $\mathbb{R}$

Bekijk een C^2-functie $f\colon E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}$ open. We zeggen dat f een lokaal maximum heeft in a als er een $\delta > 0$ bestaat zodat voor alle $x \in (a - \delta, a + \delta)$ geldt $f(x) \leq f(a)$. Bekend:

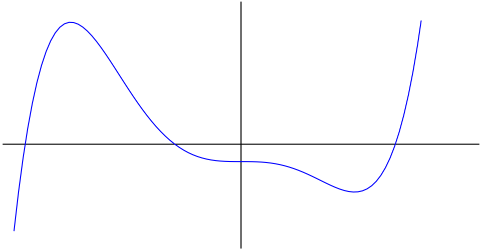
1. als f een lokaal extremum aanneemt in a, dan $f'(a) = 0$,



Extrema in $\mathbb{R}$

Bekijk een C^2-functie $f\colon E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}$ open. We zeggen dat f een lokaal maximum heeft in a als er een $\delta > 0$ bestaat zodat voor alle $x \in (a-\delta, a+\delta)$ geldt $f(x) \leq f(a)$. Bekend:

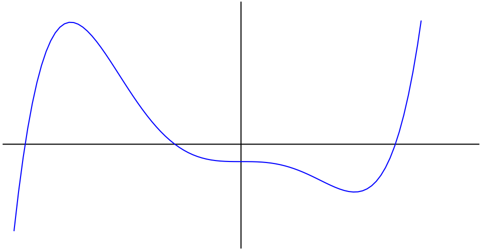
1. als f een lokaal extremum aanneemt in a, dan $f'(a) = 0$,
2. als f een maximum aanneemt in a, dan is $f''(a) \leq 0$,



Extrema in $\mathbb{R}$

Bekijk een C^2-functie $f\colon E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}$ open. We zeggen dat f een lokaal maximum heeft in a als er een $\delta > 0$ bestaat zodat voor alle $x \in (a-\delta, a+\delta)$ geldt $f(x) \le f(a)$. Bekend:

1. als f een lokaal extremum aanneemt in a, dan $f'(a) = 0$,
2. als f een maximum aanneemt in a, dan is $f''(a) \le 0$,
3. als $f'(a) = 0$ en $f''(a) < 0$, dan heeft f een maximum in a.



Extrema in $\mathbb{R}^n$

We bekijken een functie $f : E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

Extrema in $\mathbb{R}^n$

We bekijken een functie $f\colon E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

- f heeft een lokaal maximum in $\vec{\mathbf{a}} \in E$ als er een $\delta > 0$ is zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \leq f(\vec{\mathbf{a}})$ voor $\vec{\mathbf{x}} \in B(\vec{\mathbf{a}}, \delta)$.

Extrema in $\mathbb{R}^n$

We bekijken een functie $f\colon E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

- f heeft een lokaal maximum in $\vec{\mathbf{a}} \in E$ als er een $\delta > 0$ is zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \leq f(\vec{\mathbf{a}})$ voor $\vec{\mathbf{x}} \in B(\vec{\mathbf{a}}, \delta)$.
- We noemen $\vec{\mathbf{a}}$ een absoluut maximum als $f(\vec{\mathbf{x}}) \leq f(\vec{\mathbf{a}})$ voor alle $\vec{\mathbf{x}} \in E$.

Extrema in $\mathbb{R}^n$

We bekijken een functie $f\colon E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

- f heeft een lokaal maximum in $\vec{\mathbf{a}} \in E$ als er een $\delta > 0$ is zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \leq f(\vec{\mathbf{a}})$ voor $\vec{\mathbf{x}} \in B(\vec{\mathbf{a}}, \delta)$.
- We noemen $\vec{\mathbf{a}}$ een absoluut maximum als $f(\vec{\mathbf{x}}) \leq f(\vec{\mathbf{a}})$ voor alle $\vec{\mathbf{x}} \in E$. Anders heet $\vec{\mathbf{a}}$ relatief.

Extrema in $\mathbb{R}^n$

We bekijken een functie $f\colon E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

- f heeft een lokaal maximum in $\vec{\mathbf{a}} \in E$ als er een $\delta > 0$ is zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \leq f(\vec{\mathbf{a}})$ voor $\vec{\mathbf{x}} \in B(\vec{\mathbf{a}}, \delta)$.
- We noemen $\vec{\mathbf{a}}$ een absoluut maximum als $f(\vec{\mathbf{x}}) \leq f(\vec{\mathbf{a}})$ voor alle $\vec{\mathbf{x}} \in E$. Anders heet $\vec{\mathbf{a}}$ relatief.
- We noemen $\vec{\mathbf{a}}$ een sterk maximum als er een $\delta > 0$ is zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) < f(\vec{\mathbf{a}})$ voor $\vec{\mathbf{x}} \in B(\vec{\mathbf{a}}, \delta)$ en $\vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{a}}$.

Extrema in $\mathbb{R}^n$

We bekijken een functie $f : E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

- f heeft een lokaal maximum in $\vec{\mathbf{a}} \in E$ als er een $\delta > 0$ is zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \leq f(\vec{\mathbf{a}})$ voor $\vec{\mathbf{x}} \in B(\vec{\mathbf{a}}, \delta)$.
- We noemen $\vec{\mathbf{a}}$ een absoluut maximum als $f(\vec{\mathbf{x}}) \leq f(\vec{\mathbf{a}})$ voor alle $\vec{\mathbf{x}} \in E$. Anders heet $\vec{\mathbf{a}}$ relatief.
- We noemen $\vec{\mathbf{a}}$ een sterk maximum als er een $\delta > 0$ is zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) < f(\vec{\mathbf{a}})$ voor $\vec{\mathbf{x}} \in B(\vec{\mathbf{a}}, \delta)$ en $\vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{a}}$. Anders heet $\vec{\mathbf{a}}$ zwak.

Extrema in $\mathbb{R}^n$

We bekijken een functie $f\colon E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

- f heeft een lokaal maximum in $\vec{\mathbf{a}} \in E$ als er een $\delta > 0$ is zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \leq f(\vec{\mathbf{a}})$ voor $\vec{\mathbf{x}} \in B(\vec{\mathbf{a}}, \delta)$.
- We noemen $\vec{\mathbf{a}}$ een absoluut maximum als $f(\vec{\mathbf{x}}) \leq f(\vec{\mathbf{a}})$ voor alle $\vec{\mathbf{x}} \in E$. Anders heet $\vec{\mathbf{a}}$ relatief.
- We noemen $\vec{\mathbf{a}}$ een sterk maximum als er een $\delta > 0$ is zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) < f(\vec{\mathbf{a}})$ voor $\vec{\mathbf{x}} \in B(\vec{\mathbf{a}}, \delta)$ en $\vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{a}}$. Anders heet $\vec{\mathbf{a}}$ zwak.
- Het punt $\vec{\mathbf{a}}$ kan een inwendig maximum ($\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$)

Extrema in $\mathbb{R}^n$

We bekijken een functie $f\colon E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

- f heeft een lokaal maximum in $\vec{\mathbf{a}} \in E$ als er een $\delta > 0$ is zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \leq f(\vec{\mathbf{a}})$ voor $\vec{\mathbf{x}} \in B(\vec{\mathbf{a}}, \delta)$.
- We noemen $\vec{\mathbf{a}}$ een absoluut maximum als $f(\vec{\mathbf{x}}) \leq f(\vec{\mathbf{a}})$ voor alle $\vec{\mathbf{x}} \in E$. Anders heet $\vec{\mathbf{a}}$ relatief.
- We noemen $\vec{\mathbf{a}}$ een sterk maximum als er een $\delta > 0$ is zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) < f(\vec{\mathbf{a}})$ voor $\vec{\mathbf{x}} \in B(\vec{\mathbf{a}}, \delta)$ en $\vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{a}}$. Anders heet $\vec{\mathbf{a}}$ zwak.
- Het punt $\vec{\mathbf{a}}$ kan een inwendig maximum ($\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$) of een randmaximum ($\vec{\mathbf{a}} \in \partial E$) zijn.

Extrema en afgeleides

Propositie 13.6

Zij $f: E \to \mathbb{R}$ en $\vec{\mathbf{a}}$ een inwendig extremum van f, dan

(1) Neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}$. Als de richtingsafgeleide $(D_{\vec{\mathbf{u}}}f)(\vec{\mathbf{a}})$ bestaat, dan is $(D_{\vec{\mathbf{u}}}f)(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

(2) Als f differentieerbaar is in $\vec{\mathbf{a}}$, dan geldt $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

Propositie 13.6

Zij $f : E \to \mathbb{R}$ en $\vec{\mathbf{a}}$ een inwendig extremum van f, dan

(1) Neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}$. Als de richtingsafgeleide $(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}})$ bestaat, dan is $(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

(2) Als f differentieerbaar is in $\vec{\mathbf{a}}$, dan geldt $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

Bewijs:

Extrema en afgeleides

Propositie 13.6

Zij $f : E \to \mathbb{R}$ en $\vec{\mathbf{a}}$ een inwendig extremum van f, dan

(1) Neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}$. Als de richtingsafgeleide $(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}})$ bestaat, dan is $(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

(2) Als f differentieerbaar is in $\vec{\mathbf{a}}$, dan geldt $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

Bewijs: neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$

Extrema en afgeleides

Propositie 13.6

Zij $f : E \to \mathbb{R}$ en $\vec{\mathbf{a}}$ een inwendig extremum van f, dan

(1) Neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}$. Als de richtingsafgeleide $(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}})$ bestaat, dan is $(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

(2) Als f differentieerbaar is in $\vec{\mathbf{a}}$, dan geldt $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

Bewijs: neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$ en definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{u}})$.

Extrema en afgeleides

Propositie 13.6

Zij $f : E \to \mathbb{R}$ en $\vec{\mathbf{a}}$ een inwendig extremum van f, dan

(1) Neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}$. Als de richtingsafgeleide $(D_{\vec{\mathbf{u}}}f)(\vec{\mathbf{a}})$ bestaat, dan is $(D_{\vec{\mathbf{u}}}f)(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

(2) Als f differentieerbaar is in $\vec{\mathbf{a}}$, dan geldt $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

Bewijs: neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$ en definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{u}})$. Dan is g een functie op $\mathbb{R}$ met een lokaal extremum in 0.

Propositie 13.6

Zij $f : E \to \mathbb{R}$ en $\vec{\mathbf{a}}$ een inwendig extremum van f, dan

(1) Neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}$. Als de richtingsafgeleide $(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}})$ bestaat, dan is $(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

(2) Als f differentieerbaar is in $\vec{\mathbf{a}}$, dan geldt $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

Bewijs: neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$ en definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{u}})$. Dan is g een functie op $\mathbb{R}$ met een lokaal extremum in 0. Dus

$$g'(0) = 0.$$

Propositie 13.6

Zij $f : E \to \mathbb{R}$ en $\vec{\mathbf{a}}$ een inwendig extremum van f, dan

(1) Neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}$. Als de richtingsafgeleide $(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}})$ bestaat, dan is $(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

(2) Als f differentieerbaar is in $\vec{\mathbf{a}}$, dan geldt $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

Bewijs: neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$ en definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{u}})$. Dan is g een functie op $\mathbb{R}$ met een lokaal extremum in 0. Dus

$$(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}}) := g'(0) = 0.$$

Extrema en afgeleides

Propositie 13.6

Zij $f : E \to \mathbb{R}$ en $\vec{\mathbf{a}}$ een inwendig extremum van f, dan

(1) Neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}$. Als de richtingsafgeleide $(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}})$ bestaat, dan is $(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

(2) Als f differentieerbaar is in $\vec{\mathbf{a}}$, dan geldt $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

Bewijs: neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$ en definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{u}})$. Dan is g een functie op $\mathbb{R}$ met een lokaal extremum in 0. Dus

$$(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}}) := g'(0) = 0.$$

Dit bewijst (1).

Propositie 13.6

Zij $f : E \to \mathbb{R}$ en $\vec{\mathbf{a}}$ een inwendig extremum van f, dan

(1) Neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}$. Als de richtingsafgeleide $(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}})$ bestaat, dan is $(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

(2) Als f differentieerbaar is in $\vec{\mathbf{a}}$, dan geldt $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

Bewijs: neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$ en definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{u}})$. Dan is g een functie op $\mathbb{R}$ met een lokaal extremum in 0. Dus

$$(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}}) := g'(0) = 0.$$

Dit bewijst (1). Merk nu op dat als f differentieerbaar is

Extrema en afgeleides

Propositie 13.6

Zij $f : E \to \mathbb{R}$ en $\vec{\mathbf{a}}$ een inwendig extremum van f, dan

(1) Neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}$. Als de richtingsafgeleide $(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}})$ bestaat, dan is $(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

(2) Als f differentieerbaar is in $\vec{\mathbf{a}}$, dan geldt $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

Bewijs: neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$ en definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{u}})$. Dan is g een functie op $\mathbb{R}$ met een lokaal extremum in 0. Dus

$$(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}}) := g'(0) = 0.$$

Dit bewijst (1). Merk nu op dat als f differentieerbaar is, dat voor alle $\vec{\mathbf{u}}$ geldt

$$f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{u}} = (D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}})$$

Extrema en afgeleides

Propositie 13.6

Zij $f: E \to \mathbb{R}$ en $\vec{\mathbf{a}}$ een inwendig extremum van f, dan

(1) Neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}$. Als de richtingsafgeleide $(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}})$ bestaat, dan is $(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

(2) Als f differentieerbaar is in $\vec{\mathbf{a}}$, dan geldt $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

Bewijs: neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$ en definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{u}})$. Dan is g een functie op $\mathbb{R}$ met een lokaal extremum in 0. Dus

$$(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}}) := g'(0) = 0.$$

Dit bewijst (1). Merk nu op dat als f differentieerbaar is, dat voor alle $\vec{\mathbf{u}}$ geldt

$$f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{u}} = (D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}}) = 0,$$

Propositie 13.6

Zij $f : E \to \mathbb{R}$ en $\vec{\mathbf{a}}$ een inwendig extremum van f, dan

(1) Neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}$. Als de richtingsafgeleide $(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}})$ bestaat, dan is $(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

(2) Als f differentieerbaar is in $\vec{\mathbf{a}}$, dan geldt $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

Bewijs: neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$ en definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{u}})$. Dan is g een functie op $\mathbb{R}$ met een lokaal extremum in 0. Dus

$$(D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}}) := g'(0) = 0.$$

Dit bewijst (1). Merk nu op dat als f differentieerbaar is, dat voor alle $\vec{\mathbf{u}}$ geldt

$$f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{u}} = (D_{\vec{\mathbf{u}}} f)(\vec{\mathbf{a}}) = 0,$$

dus dan volgt $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

Propositie 13.6

Zij $f : E \to \mathbb{R}$ en $\vec{\mathbf{a}}$ een inwendig extremum van f, dan

(1) Neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}$. Als de richtingsafgeleide $(D_{\vec{\mathbf{u}}}f)(\vec{\mathbf{a}})$ bestaat, dan is $(D_{\vec{\mathbf{u}}}f)(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

(2) Als f differentieerbaar is in $\vec{\mathbf{a}}$, dan geldt $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

Bewijs: neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$ en definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{u}})$. Dan is g een functie op $\mathbb{R}$ met een lokaal extremum in 0. Dus

$$(D_{\vec{\mathbf{u}}}f)(\vec{\mathbf{a}}) := g'(0) = 0.$$

Dit bewijst (1). Merk nu op dat als f differentieerbaar is, dat voor alle $\vec{\mathbf{u}}$ geldt

$$f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{u}} = (D_{\vec{\mathbf{u}}}f)(\vec{\mathbf{a}}) = 0,$$

dus dan volgt $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$. $\square$

Propositie 13.6

Zij $f : E \to \mathbb{R}$ en $\vec{\mathbf{a}}$ een inwendig extremum van f, dan

(1) Neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}$. Als de richtingsafgeleide $(D_{\vec{\mathbf{u}}}f)(\vec{\mathbf{a}})$ bestaat, dan is $(D_{\vec{\mathbf{u}}}f)(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

(2) Als f differentieerbaar is in $\vec{\mathbf{a}}$, dan geldt $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

Een punt met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$ heet een stationair punt.

Bewijs: neem $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$ en definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{u}})$. Dan is g een functie op $\mathbb{R}$ met een lokaal extremum in 0. Dus

$$(D_{\vec{\mathbf{u}}}f)(\vec{\mathbf{a}}) := g'(0) = 0.$$

Dit bewijst (1). Merk nu op dat als f differentieerbaar is, dat voor alle $\vec{\mathbf{u}}$ geldt

$$f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{u}} = (D_{\vec{\mathbf{u}}}f)(\vec{\mathbf{a}}) = 0,$$

dus dan volgt $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$. $\square$

Taylorreeks

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^2 functie.

Taylorreeks

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^2 functie. De Stelling van Taylor geeft

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}})$$

Taylorreeks

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^2 functie. De Stelling van Taylor geeft

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = f(\vec{\mathbf{a}}) + \sum_{j_1=1}^{2} \frac{D_{j_1} f(\vec{\mathbf{a}})}{1!} h_{j_1} + \sum_{j_1, j_2=1}^{2} \frac{D_{j_1 j_2} f(\vec{\mathbf{a}})}{2!} h_{j_1} h_{j_2} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2)$$

Taylorreeks

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^2 functie. De Stelling van Taylor geeft

$$\begin{aligned} f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) &= f(\vec{\mathbf{a}}) + \sum_{j_1=1}^{2} \frac{D_{j_1} f(\vec{\mathbf{a}})}{1!} h_{j_1} + \sum_{j_1, j_2=1}^{2} \frac{D_{j_1 j_2} f(\vec{\mathbf{a}})}{2!} h_{j_1} h_{j_2} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2) \\ &= f(\vec{\mathbf{a}}) + D_1 f(\vec{\mathbf{a}}) h_1 + D_2 f(\vec{\mathbf{a}}) h_2 \\ &\qquad + \tfrac{1}{2} \left[D_{11} f(\vec{\mathbf{a}}) h_1^2 + 2 D_{12} f(\vec{\mathbf{a}}) h_1 h_2 + D_{22} f(\vec{\mathbf{a}}) h_2^2 \right] + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2) \end{aligned}$$

Taylorreeks

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^2 functie. De Stelling van Taylor geeft

$$\begin{aligned}
f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{h}}) &= f(\vec{\mathbf{a}}) + \sum_{j_1=1}^{2} \frac{D_{j_1} f(\vec{\mathbf{a}})}{1!} h_{j_1} + \sum_{j_1,j_2=1}^{2} \frac{D_{j_1 j_2} f(\vec{\mathbf{a}})}{2!} h_{j_1} h_{j_2} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2) \\
&= f(\vec{\mathbf{a}}) + D_1 f(\vec{\mathbf{a}}) h_1 + D_2 f(\vec{\mathbf{a}}) h_2 \\
&\qquad + \tfrac{1}{2} \left[D_{11} f(\vec{\mathbf{a}}) h_1^2 + 2 D_{12} f(\vec{\mathbf{a}}) h_1 h_2 + D_{22} f(\vec{\mathbf{a}}) h_2^2 \right] + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2) \\
&= f(\vec{\mathbf{a}}) + \begin{bmatrix} D_1 f(\vec{\mathbf{a}}) & D_2 f(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \\
&\qquad + \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} f(\vec{\mathbf{a}}) & D_{12} f(\vec{\mathbf{a}}) \\ D_{12} f(\vec{\mathbf{a}}) & D_{22} f(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2)
\end{aligned}$$

Taylorreeks

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^2 functie. De Stelling van Taylor geeft

$$
\begin{aligned}
f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) &= f(\vec{\mathbf{a}}) + \sum_{j_1=1}^{2} \frac{D_{j_1} f(\vec{\mathbf{a}})}{1!} h_{j_1} + \sum_{j_1,j_2=1}^{2} \frac{D_{j_1 j_2} f(\vec{\mathbf{a}})}{2!} h_{j_1} h_{j_2} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2) \\
&= f(\vec{\mathbf{a}}) + D_1 f(\vec{\mathbf{a}}) h_1 + D_2 f(\vec{\mathbf{a}}) h_2 \\
&\qquad + \tfrac{1}{2} \left[D_{11} f(\vec{\mathbf{a}}) h_1^2 + 2 D_{12} f(\vec{\mathbf{a}}) h_1 h_2 + D_{22} f(\vec{\mathbf{a}}) h_2^2 \right] + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2) \\
&= f(\vec{\mathbf{a}}) + \begin{bmatrix} D_1 f(\vec{\mathbf{a}}) & D_2 f(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \\
&\qquad + \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} f(\vec{\mathbf{a}}) & D_{12} f(\vec{\mathbf{a}}) \\ D_{12} f(\vec{\mathbf{a}}) & D_{22} f(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2) \\
&= f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}}) \vec{\mathbf{h}} + \tfrac{1}{2} \vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}}) \vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2),
\end{aligned}
$$

Taylorreeks

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^2 functie. De Stelling van Taylor geeft

$$
\begin{aligned}
f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) &= f(\vec{\mathbf{a}}) + \sum_{j_1=1}^{2} \frac{D_{j_1} f(\vec{\mathbf{a}})}{1!} h_{j_1} + \sum_{j_1, j_2=1}^{2} \frac{D_{j_1 j_2} f(\vec{\mathbf{a}})}{2!} h_{j_1} h_{j_2} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2) \\
&= f(\vec{\mathbf{a}}) + D_1 f(\vec{\mathbf{a}}) h_1 + D_2 f(\vec{\mathbf{a}}) h_2 \\
&\qquad + \tfrac{1}{2} \left[D_{11} f(\vec{\mathbf{a}}) h_1^2 + 2 D_{12} f(\vec{\mathbf{a}}) h_1 h_2 + D_{22} f(\vec{\mathbf{a}}) h_2^2 \right] + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2) \\
&= f(\vec{\mathbf{a}}) + \begin{bmatrix} D_1 f(\vec{\mathbf{a}}) & D_2 f(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \\
&\qquad + \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} f(\vec{\mathbf{a}}) & D_{12} f(\vec{\mathbf{a}}) \\ D_{12} f(\vec{\mathbf{a}}) & D_{22} f(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2) \\
&= f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}}) \vec{\mathbf{h}} + \tfrac{1}{2} \vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}}) \vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2),
\end{aligned}
$$

waarbij

$$H_f(\vec{\mathbf{a}})$$

Taylorreeks

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^2 functie. De Stelling van Taylor geeft

$$\begin{aligned}
f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) &= f(\vec{\mathbf{a}}) + \sum_{j_1=1}^{2} \frac{D_{j_1} f(\vec{\mathbf{a}})}{1!} h_{j_1} + \sum_{j_1,j_2=1}^{2} \frac{D_{j_1 j_2} f(\vec{\mathbf{a}})}{2!} h_{j_1} h_{j_2} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2) \\
&= f(\vec{\mathbf{a}}) + D_1 f(\vec{\mathbf{a}}) h_1 + D_2 f(\vec{\mathbf{a}}) h_2 \\
&\qquad + \tfrac{1}{2} \left[D_{11} f(\vec{\mathbf{a}}) h_1^2 + 2 D_{12} f(\vec{\mathbf{a}}) h_1 h_2 + D_{22} f(\vec{\mathbf{a}}) h_2^2 \right] + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2) \\
&= f(\vec{\mathbf{a}}) + \begin{bmatrix} D_1 f(\vec{\mathbf{a}}) & D_2 f(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \\
&\qquad + \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} f(\vec{\mathbf{a}}) & D_{12} f(\vec{\mathbf{a}}) \\ D_{12} f(\vec{\mathbf{a}}) & D_{22} f(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2) \\
&= f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}}) \vec{\mathbf{h}} + \tfrac{1}{2} \vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}}) \vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2),
\end{aligned}$$

waarbij

$$H_f(\vec{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} D_{11} f(\vec{\mathbf{a}}) & D_{12} f(\vec{\mathbf{a}}) \\ D_{12} f(\vec{\mathbf{a}}) & D_{22} f(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix}$$

Taylorreeks

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^2 functie. De Stelling van Taylor geeft

$$\begin{aligned}
f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) &= f(\vec{\mathbf{a}}) + \sum_{j_1=1}^{2} \frac{D_{j_1} f(\vec{\mathbf{a}})}{1!} h_{j_1} + \sum_{j_1, j_2=1}^{2} \frac{D_{j_1 j_2} f(\vec{\mathbf{a}})}{2!} h_{j_1} h_{j_2} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2) \\
&= f(\vec{\mathbf{a}}) + D_1 f(\vec{\mathbf{a}}) h_1 + D_2 f(\vec{\mathbf{a}}) h_2 \\
&\qquad + \tfrac{1}{2} \left[D_{11} f(\vec{\mathbf{a}}) h_1^2 + 2 D_{12} f(\vec{\mathbf{a}}) h_1 h_2 + D_{22} f(\vec{\mathbf{a}}) h_2^2 \right] + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2) \\
&= f(\vec{\mathbf{a}}) + \begin{bmatrix} D_1 f(\vec{\mathbf{a}}) & D_2 f(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \\
&\qquad + \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} f(\vec{\mathbf{a}}) & D_{12} f(\vec{\mathbf{a}}) \\ D_{12} f(\vec{\mathbf{a}}) & D_{22} f(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2) \\
&= f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}}) \vec{\mathbf{h}} + \tfrac{1}{2} \vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}}) \vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2),
\end{aligned}$$

waarbij

$$H_f(\vec{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} D_{11} f(\vec{\mathbf{a}}) & D_{12} f(\vec{\mathbf{a}}) \\ D_{12} f(\vec{\mathbf{a}}) & D_{22} f(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix}$$

de Hesse-matrix of Hessiaan van f wordt genoemd.

Taylorreeks: meer algemeen

Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^2 functie.

Taylorreeks: meer algemeen

Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^2 functie. Er geldt

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}})$$

Taylorreeks: meer algemeen

Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^2 functie. Er geldt

$$
\begin{aligned}
f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) &= f(\vec{\mathbf{a}}) + \sum_{j_1=1}^{n} \frac{D_{j_1} f(\vec{\mathbf{a}})}{1!} h_{j_1} + \sum_{j_1, j_2=1}^{n} \frac{D_{j_1 j_2} f(\vec{\mathbf{a}})}{2!} h_{j_1} h_{j_2} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2) \\
&= f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + \tfrac{1}{2} \vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}}) \vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2),
\end{aligned}
$$

Taylorreeks: meer algemeen

Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^2 functie. Er geldt

$$
\begin{aligned}
f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{h}}) &= f(\vec{\mathbf{a}}) + \sum_{j_1=1}^{n} \frac{D_{j_1} f(\vec{\mathbf{a}})}{1!} h_{j_1} + \sum_{j_1,j_2=1}^{n} \frac{D_{j_1 j_2} f(\vec{\mathbf{a}})}{2!} h_{j_1} h_{j_2} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2) \\
&= f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2),
\end{aligned}
$$

waarbij

$$
H_f(\vec{\mathbf{a}}) = \begin{pmatrix} D_{11} f(\vec{\mathbf{a}}) & \cdots & D_{1n} f(\vec{\mathbf{a}}) \\ \vdots & & \vdots \\ D_{n1} f(\vec{\mathbf{a}}) & \cdots & D_{nn} f(\vec{\mathbf{a}}) \end{pmatrix}
$$

de Hesse-matrix of Hessiaan van f wordt genoemd.

Taylorreeks: meer algemeen

Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^2 functie. Er geldt

$$
\begin{aligned}
f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) &= f(\vec{\mathbf{a}}) + \sum_{j_1=1}^{n} \frac{D_{j_1} f(\vec{\mathbf{a}})}{1!} h_{j_1} + \sum_{j_1,j_2=1}^{n} \frac{D_{j_1 j_2} f(\vec{\mathbf{a}})}{2!} h_{j_1} h_{j_2} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2) \\
&= f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2),
\end{aligned}
$$

waarbij

$$
H_f(\vec{\mathbf{a}}) = \begin{pmatrix} D_{11} f(\vec{\mathbf{a}}) & \cdots & D_{1n} f(\vec{\mathbf{a}}) \\ \vdots & & \vdots \\ D_{n1} f(\vec{\mathbf{a}}) & \cdots & D_{nn} f(\vec{\mathbf{a}}) \end{pmatrix}
$$

de Hesse-matrix of Hessiaan van f wordt genoemd. In het bijzonder geldt in een stationair punt

Taylorreeks: meer algemeen

Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^2 functie. Er geldt

$$\begin{aligned} f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) &= f(\vec{\mathbf{a}}) + \sum_{j_1=1}^{n} \frac{D_{j_1} f(\vec{\mathbf{a}})}{1!} h_{j_1} + \sum_{j_1,j_2=1}^{n} \frac{D_{j_1 j_2} f(\vec{\mathbf{a}})}{2!} h_{j_1} h_{j_2} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2) \\ &= f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2), \end{aligned}$$

waarbij

$$H_f(\vec{\mathbf{a}}) = \begin{pmatrix} D_{11} f(\vec{\mathbf{a}}) & \cdots & D_{1n} f(\vec{\mathbf{a}}) \\ \vdots & & \vdots \\ D_{n1} f(\vec{\mathbf{a}}) & \cdots & D_{nn} f(\vec{\mathbf{a}}) \end{pmatrix}$$

de Hesse-matrix of Hessiaan van f wordt genoemd. In het bijzonder geldt in een stationair punt

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = f(\vec{\mathbf{a}}) + \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2).$$

Tweede afgeleide en extrema

Propositie 13.9

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ een C^2 functie en $\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$. Als f een lokaal minimum aanneemt in $\vec{\mathbf{a}}$, dan geldt $\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} \geq 0$ voor alle $\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n$.

Propositie 13.9

Zij $f : E \to \mathbb{R}^n$ een C^2 functie en $\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$. Als f een lokaal minimum aanneemt in $\vec{\mathbf{a}}$, dan geldt $\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} \geq 0$ voor alle $\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n$.

Bewijs:

Tweede afgeleide en extrema

Propositie 13.9

Zij $f : E \to \mathbb{R}^n$ een C^2 functie en $\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$. Als f een lokaal minimum aanneemt in $\vec{\mathbf{a}}$, dan geldt $\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} \geq 0$ voor alle $\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n$.

Bewijs: neem $\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n$ en bekijk

$$g(t) := f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}).$$

Tweede afgeleide en extrema

Propositie 13.9

Zij $f : E \to \mathbb{R}^n$ een C^2 functie en $\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$. Als f een lokaal minimum aanneemt in $\vec{\mathbf{a}}$, dan geldt $\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} \geq 0$ voor alle $\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n$.

Bewijs: neem $\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n$ en bekijk

$$g(t) := f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}).$$

Als f een lokaal minimum aanneemt, dan neemt g een lokaal minimum aan in 0.

Tweede afgeleide en extrema

Propositie 13.9

Zij $f : E \to \mathbb{R}^n$ een C^2 functie en $\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$. Als f een lokaal minimum aanneemt in $\vec{\mathbf{a}}$, dan geldt $\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} \geq 0$ voor alle $\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n$.

Bewijs: neem $\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n$ en bekijk

$$g(t) := f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}).$$

Als f een lokaal minimum aanneemt, dan neemt g een lokaal minimum aan in 0. Dus $g''(0) \geq 0$.

Propositie 13.9

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ een C^2 functie en $\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$. Als f een lokaal minimum aanneemt in $\vec{\mathbf{a}}$, dan geldt $\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} \geq 0$ voor alle $\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n$.

Bewijs: neem $\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n$ en bekijk

$$g(t) := f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}).$$

Als f een lokaal minimum aanneemt, dan neemt g een lokaal minimum aan in 0. Dus $g''(0) \geq 0$. Met wat rekenwerk (Lemma 12.5) zien we dat

$$g''(0) = \vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}.$$

Tweede afgeleide en extrema

Stelling 13.10

Zij $f : E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$ met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Stel dat voor alle $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ geldt $\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} > 0$. Dan neemt f een sterk lokaal minimum aan in $\vec{\mathbf{a}}$.

Tweede afgeleide en extrema

Stelling 13.10

Zij $f : E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$ met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Stel dat voor alle $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ geldt $\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} > 0$. Dan neemt f een sterk lokaal minimum aan in $\vec{\mathbf{a}}$.

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2)$$

Tweede afgeleide en extrema

Stelling 13.10

Zij $f: E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$ met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Stel dat voor alle $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ geldt $\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} > 0$. Dan neemt f een sterk lokaal minimum aan in $\vec{\mathbf{a}}$.

- Bekijk $\Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven door $\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}$.

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2)$$

Tweede afgeleide en extrema

Stelling 13.10

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$ met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Stel dat voor alle $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ geldt $\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} > 0$. Dan neemt f een sterk lokaal minimum aan in $\vec{\mathbf{a}}$.

- Bekijk $\Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven door $\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}$.
- Dit is continu

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2)$$

Tweede afgeleide en extrema

Stelling 13.10

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$ met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Stel dat voor alle $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ geldt $\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} > 0$. Dan neemt f een sterk lokaal minimum aan in $\vec{\mathbf{a}}$.

- Bekijk $\Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven door $\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}$.
- Dit is continu en neemt dus een minimum aan op de compacte verzameling $S^{n-1} := \{\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{h}}\| = 1\}$.

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2)$$

Tweede afgeleide en extrema

Stelling 13.10

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$ met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Stel dat voor alle $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ geldt $\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} > 0$. Dan neemt f een sterk lokaal minimum aan in $\vec{\mathbf{a}}$.

- Bekijk $\Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven door $\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}$.
- Dit is continu en neemt dus een minimum aan op de compacte verzameling $S^{n-1} := \{\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{h}}\| = 1\}$.
- Dus voor zekere $\vec{\mathbf{h}}_0$ geldt $\inf_{\|\vec{\mathbf{h}}\|=1} \Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \Lambda(\vec{\mathbf{h}}_0)$

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2)$$

Tweede afgeleide en extrema

Stelling 13.10

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$ met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Stel dat voor alle $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ geldt $\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} > 0$. Dan neemt f een sterk lokaal minimum aan in $\vec{\mathbf{a}}$.

- Bekijk $\Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven door $\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}$.
- Dit is continu en neemt dus een minimum aan op de compacte verzameling $S^{n-1} := \{\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{h}}\| = 1\}$.
- Dus voor zekere $\vec{\mathbf{h}}_0$ geldt $\mu := \inf_{\|\vec{\mathbf{h}}\|=1} \Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \Lambda(\vec{\mathbf{h}}_0)$

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2)$$

Tweede afgeleide en extrema

Stelling 13.10

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$ met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Stel dat voor alle $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ geldt $\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} > 0$. Dan neemt f een sterk lokaal minimum aan in $\vec{\mathbf{a}}$.

- Bekijk $\Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven door $\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}$.
- Dit is continu en neemt dus een minimum aan op de compacte verzameling $S^{n-1} := \{\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{h}}\| = 1\}$.
- Dus voor zekere $\vec{\mathbf{h}}_0$ geldt $\mu := \inf_{\|\vec{\mathbf{h}}\|=1} \Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \Lambda(\vec{\mathbf{h}}_0) > 0$.

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2)$$

Tweede afgeleide en extrema

Stelling 13.10

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$ met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Stel dat voor alle $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ geldt $\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} > 0$. Dan neemt f een sterk lokaal minimum aan in $\vec{\mathbf{a}}$.

- Bekijk $\Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven door $\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}$.
- Dit is continu en neemt dus een minimum aan op de compacte verzameling $S^{n-1} := \{\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{h}}\| = 1\}$.
- Dus voor zekere $\vec{\mathbf{h}}_0$ geldt $\mu := \inf_{\|\vec{\mathbf{h}}\|=1} \Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \Lambda(\vec{\mathbf{h}}_0) > 0$.
- Voor $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ willekeurig geldt nu

$$\Lambda(\vec{\mathbf{h}})$$

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2)$$

Tweede afgeleide en extrema

Stelling 13.10

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$ met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Stel dat voor alle $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ geldt $\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} > 0$. Dan neemt f een sterk lokaal minimum aan in $\vec{\mathbf{a}}$.

- Bekijk $\Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven door $\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}$.
- Dit is continu en neemt dus een minimum aan op de compacte verzameling $S^{n-1} := \{\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{h}}\| = 1\}$.
- Dus voor zekere $\vec{\mathbf{h}}_0$ geldt $\mu := \inf_{\|\vec{\mathbf{h}}\|=1} \Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \Lambda(\vec{\mathbf{h}}_0) > 0$.
- Voor $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ willekeurig geldt nu

$$\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \|\vec{\mathbf{h}}\|^2 \frac{\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|^2}$$

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2)$$

Tweede afgeleide en extrema

Stelling 13.10

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$ met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Stel dat voor alle $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ geldt $\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} > 0$. Dan neemt f een sterk lokaal minimum aan in $\vec{\mathbf{a}}$.

- Bekijk $\Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven door $\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}$.
- Dit is continu en neemt dus een minimum aan op de compacte verzameling $S^{n-1} := \{\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{h}}\| = 1\}$.
- Dus voor zekere $\vec{\mathbf{h}}_0$ geldt $\mu := \inf_{\|\vec{\mathbf{h}}\|=1} \Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \Lambda(\vec{\mathbf{h}}_0) > 0$.
- Voor $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ willekeurig geldt nu

$$\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \|\vec{\mathbf{h}}\|^2 \frac{\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|^2} = \|\vec{\mathbf{h}}\|^2 \left[\frac{\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right]^\top H_f(\vec{\mathbf{a}}) \left[\frac{\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right]$$

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2)$$

Tweede afgeleide en extrema

Stelling 13.10

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$ met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Stel dat voor alle $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ geldt $\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} > 0$. Dan neemt f een sterk lokaal minimum aan in $\vec{\mathbf{a}}$.

- Bekijk $\Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven door $\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}$.
- Dit is continu en neemt dus een minimum aan op de compacte verzameling $S^{n-1} := \{\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{h}}\| = 1\}$.
- Dus voor zekere $\vec{\mathbf{h}}_0$ geldt $\mu := \inf_{\|\vec{\mathbf{h}}\|=1} \Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \Lambda(\vec{\mathbf{h}}_0) > 0$.
- Voor $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ willekeurig geldt nu

$$\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \|\vec{\mathbf{h}}\|^2 \frac{\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|^2} = \|\vec{\mathbf{h}}\|^2 \left[\frac{\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right]^\top H_f(\vec{\mathbf{a}}) \left[\frac{\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right] = \|\vec{\mathbf{h}}\|^2 \Lambda\left(\frac{\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right)$$

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2)$$

Tweede afgeleide en extrema

Stelling 13.10

Zij $f: E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$ met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Stel dat voor alle $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ geldt $\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} > 0$. Dan neemt f een sterk lokaal minimum aan in $\vec{\mathbf{a}}$.

- Bekijk $\Lambda: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven door $\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}$.
- Dit is continu en neemt dus een minimum aan op de compacte verzameling $S^{n-1} := \{\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{h}}\| = 1\}$.
- Dus voor zekere $\vec{\mathbf{h}}_0$ geldt $\mu := \inf_{\|\vec{\mathbf{h}}\|=1} \Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \Lambda(\vec{\mathbf{h}}_0) > 0$.
- Voor $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ willekeurig geldt nu

$$\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \|\vec{\mathbf{h}}\|^2 \frac{\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|^2} = \|\vec{\mathbf{h}}\|^2 \left[\frac{\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right]^\top H_f(\vec{\mathbf{a}}) \left[\frac{\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right] = \|\vec{\mathbf{h}}\|^2 \Lambda\left(\frac{\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right) \geq \mu\|\vec{\mathbf{h}}\|^2.$$

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2)$$

Tweede afgeleide en extrema

Stelling 13.10

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$ met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Stel dat voor alle $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ geldt $\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} > 0$. Dan neemt f een sterk lokaal minimum aan in $\vec{\mathbf{a}}$.

- Bekijk $\Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven door $\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}$.
- Dit is continu en neemt dus een minimum aan op de compacte verzameling $S^{n-1} := \{\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{h}}\| = 1\}$.
- Dus voor zekere $\vec{\mathbf{h}}_0$ geldt $\mu := \inf_{\|\vec{\mathbf{h}}\|=1} \Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \Lambda(\vec{\mathbf{h}}_0) > 0$.
- Voor $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ willekeurig geldt nu

$$\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \|\vec{\mathbf{h}}\|^2 \frac{\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|^2} = \|\vec{\mathbf{h}}\|^2 \left[\frac{\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right]^\top H_f(\vec{\mathbf{a}}) \left[\frac{\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right] = \|\vec{\mathbf{h}}\|^2 \Lambda\left(\frac{\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right) \geq \mu\|\vec{\mathbf{h}}\|^2.$$

- Er bestaat $\delta > 0$ zodat als $\|\vec{\mathbf{h}}\| < \delta$

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2)$$

Tweede afgeleide en extrema

Stelling 13.10

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$ met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Stel dat voor alle $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ geldt $\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} > 0$. Dan neemt f een sterk lokaal minimum aan in $\vec{\mathbf{a}}$.

- Bekijk $\Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven door $\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}$.
- Dit is continu en neemt dus een minimum aan op de compacte verzameling $S^{n-1} := \{\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{h}}\| = 1\}$.
- Dus voor zekere $\vec{\mathbf{h}}_0$ geldt $\mu := \inf_{\|\vec{\mathbf{h}}\|=1} \Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \Lambda(\vec{\mathbf{h}}_0) > 0$.
- Voor $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ willekeurig geldt nu

$$\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \|\vec{\mathbf{h}}\|^2 \frac{\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|^2} = \|\vec{\mathbf{h}}\|^2 \left[\frac{\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right]^\top H_f(\vec{\mathbf{a}}) \left[\frac{\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right] = \|\vec{\mathbf{h}}\|^2 \Lambda\left(\frac{\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right) \geq \mu\|\vec{\mathbf{h}}\|^2.$$

- Er bestaat $\delta > 0$ zodat als $\|\vec{\mathbf{h}}\| < \delta$, dan $\left|o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2)\right| < \frac{\mu}{4}\|\vec{\mathbf{h}}\|^2$.

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2)$$

Tweede afgeleide en extrema

Stelling 13.10

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$ met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Stel dat voor alle $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ geldt $\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} > 0$. Dan neemt f een sterk lokaal minimum aan in $\vec{\mathbf{a}}$.

- Bekijk $\Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven door $\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}$.
- Dit is continu en neemt dus een minimum aan op de compacte verzameling $S^{n-1} := \{\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{h}}\| = 1\}$.
- Dus voor zekere $\vec{\mathbf{h}}_0$ geldt $\mu := \inf_{\|\vec{\mathbf{h}}\|=1} \Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \Lambda(\vec{\mathbf{h}}_0) > 0$.
- Voor $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ willekeurig geldt nu

$$\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \|\vec{\mathbf{h}}\|^2 \frac{\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|^2} = \|\vec{\mathbf{h}}\|^2 \left[\frac{\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right]^\top H_f(\vec{\mathbf{a}}) \left[\frac{\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right] = \|\vec{\mathbf{h}}\|^2 \Lambda\left(\frac{\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right) \geq \mu\|\vec{\mathbf{h}}\|^2.$$

- Er bestaat $\delta > 0$ zodat als $\|\vec{\mathbf{h}}\| < \delta$, dan $\left|o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2)\right| < \frac{\mu}{4}\|\vec{\mathbf{h}}\|^2$.
- Er volgt

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2)$$

Tweede afgeleide en extrema

Stelling 13.10

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$ met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Stel dat voor alle $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ geldt $\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} > 0$. Dan neemt f een sterk lokaal minimum aan in $\vec{\mathbf{a}}$.

- Bekijk $\Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven door $\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}$.
- Dit is continu en neemt dus een minimum aan op de compacte verzameling $S^{n-1} := \{\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{h}}\| = 1\}$.
- Dus voor zekere $\vec{\mathbf{h}}_0$ geldt $\mu := \inf_{\|\vec{\mathbf{h}}\|=1} \Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \Lambda(\vec{\mathbf{h}}_0) > 0$.
- Voor $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ willekeurig geldt nu

$$\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \|\vec{\mathbf{h}}\|^2 \frac{\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|^2} = \|\vec{\mathbf{h}}\|^2 \left[\frac{\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right]^\top H_f(\vec{\mathbf{a}}) \left[\frac{\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right] = \|\vec{\mathbf{h}}\|^2 \Lambda\left(\frac{\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right) \geq \mu\|\vec{\mathbf{h}}\|^2.$$

- Er bestaat $\delta > 0$ zodat als $\|\vec{\mathbf{h}}\| < \delta$, dan $\left|o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2)\right| < \frac{\mu}{4}\|\vec{\mathbf{h}}\|^2$.
- Er volgt

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2) \geq \tfrac{\mu}{2}\|\vec{\mathbf{h}}\|^2 - \tfrac{\mu}{4}\|\vec{\mathbf{h}}\|^2$$

Tweede afgeleide en extrema

Stelling 13.10

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $\vec{\mathbf{a}} \in E^\circ$ met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Stel dat voor alle $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ geldt $\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} > 0$. Dan neemt f een sterk lokaal minimum aan in $\vec{\mathbf{a}}$.

- Bekijk $\Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven door $\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}$.
- Dit is continu en neemt dus een minimum aan op de compacte verzameling $S^{n-1} := \{\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{h}}\| = 1\}$.
- Dus voor zekere $\vec{\mathbf{h}}_0$ geldt $\mu := \inf_{\|\vec{\mathbf{h}}\|=1} \Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \Lambda(\vec{\mathbf{h}}_0) > 0$.
- Voor $\vec{\mathbf{h}} \neq 0$ willekeurig geldt nu

$$\Lambda(\vec{\mathbf{h}}) = \|\vec{\mathbf{h}}\|^2 \frac{\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|^2} = \|\vec{\mathbf{h}}\|^2 \left[\frac{\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right]^\top H_f(\vec{\mathbf{a}}) \left[\frac{\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right] = \|\vec{\mathbf{h}}\|^2 \Lambda\left(\frac{\vec{\mathbf{h}}}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right) \geq \mu\|\vec{\mathbf{h}}\|^2.$$

- Er bestaat $\delta > 0$ zodat als $\|\vec{\mathbf{h}}\| < \delta$, dan $\left|o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2)\right| < \frac{\mu}{4}\|\vec{\mathbf{h}}\|^2$.
- Er volgt

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{h}}^\top H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|^2) \geq \tfrac{\mu}{2}\|\vec{\mathbf{h}}\|^2 - \tfrac{\mu}{4}\|\vec{\mathbf{h}}\|^2 > 0.$$

Symmetrische en positief definiete matrices

Bekijk een symmetrische matrix A.

Symmetrische en positief definiete matrices

Bekijk een symmetrische matrix A.

- We noemen A positief semidefiniet als $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} \geq 0$ voor alle $\vec{\mathbf{x}}$.

Symmetrische en positief definiete matrices

Bekijk een symmetrische matrix A.

- We noemen A positief semidefiniet als $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} \geq 0$ voor alle $\vec{\mathbf{x}}$.
- Als geldt $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} > 0$ voor $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$, dan heet A positief definiet.

Symmetrische en positief definiete matrices

Bekijk een symmetrische matrix A.

- We noemen A positief semidefiniet als $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} \geq 0$ voor alle $\vec{\mathbf{x}}$.
- Als geldt $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} > 0$ voor $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$, dan heet A positief definiet.

Analoog definiëren we negatief (semi)definiet.

Symmetrische en positief definiete matrices

Bekijk een symmetrische matrix A.

- We noemen A positief semidefiniet als $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} \geq 0$ voor alle $\vec{\mathbf{x}}$.
- Als geldt $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} > 0$ voor $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$, dan heet A positief definiet.

Analoog definiëren we negatief (semi)definiet. Uit de lineaire algebra weten we dat we kunnen schrijven

$$A = O^\top DO$$

Symmetrische en positief definiete matrices

Bekijk een symmetrische matrix A.

- We noemen A positief semidefiniet als $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} \geq 0$ voor alle $\vec{\mathbf{x}}$.
- Als geldt $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} > 0$ voor $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$, dan heet A positief definiet.

Analoog definiëren we negatief (semi)definiet. Uit de lineaire algebra weten we dat we kunnen schrijven

$$A = O^\top D O = \left[\begin{array}{c|c|c} \vec{\mathbf{e}}_1 & \cdots & \vec{\mathbf{e}}_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \vec{\mathbf{e}}_1^\top \\ \hline \vdots \\ \hline \vec{\mathbf{e}}_n^\top \end{array}\right]$$

Symmetrische en positief definiete matrices

Bekijk een symmetrische matrix A.

- We noemen A positief semidefiniet als $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} \geq 0$ voor alle $\vec{\mathbf{x}}$.
- Als geldt $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} > 0$ voor $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$, dan heet A positief definiet.

Analoog definiëren we negatief (semi)definiet. Uit de lineaire algebra weten we dat we kunnen schrijven

$$A = O^\top D O = \left[\begin{array}{c|c|c} & & \\ \vec{\mathbf{e}}_1 & \cdots & \vec{\mathbf{e}}_n \\ & & \end{array}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \vec{\mathbf{e}}_1^\top \\ \hline \vdots \\ \hline \vec{\mathbf{e}}_n^\top \end{array}\right],$$

waarbij de $\vec{\mathbf{e}}_i$ de orthonormale eigenvectoren van A zijn

Symmetrische en positief definiete matrices

Bekijk een symmetrische matrix A.

- We noemen A positief semidefiniet als $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} \geq 0$ voor alle $\vec{\mathbf{x}}$.
- Als geldt $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} > 0$ voor $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$, dan heet A positief definiet.

Analoog definiëren we negatief (semi)definiet. Uit de lineaire algebra weten we dat we kunnen schrijven

$$A = O^\top D O = \left[\begin{array}{c|c|c} & & \\ \vec{\mathbf{e}}_1 & \cdots & \vec{\mathbf{e}}_n \\ & & \end{array}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \vec{\mathbf{e}}_1^\top \\ \hline \vdots \\ \hline \vec{\mathbf{e}}_n^\top \end{array}\right],$$

waarbij de $\vec{\mathbf{e}}_i$ de orthonormale eigenvectoren van A zijn en de λ_i de eigenwaarden.

Symmetrische en positief definiete matrices

Bekijk een symmetrische matrix A.

- We noemen A positief semidefiniet als $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} \geq 0$ voor alle $\vec{\mathbf{x}}$.
- Als geldt $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} > 0$ voor $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$, dan heet A positief definiet.

Analoog definiëren we negatief (semi)definiet. Uit de lineaire algebra weten we dat we kunnen schrijven

$$A = O^\top DO = \left[\begin{array}{c|c|c} & & \\ \vec{\mathbf{e}}_1 & \cdots & \vec{\mathbf{e}}_n \\ & & \end{array}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \vec{\mathbf{e}}_1^\top \\ \hline \vdots \\ \hline \vec{\mathbf{e}}_n^\top \end{array}\right],$$

waarbij de $\vec{\mathbf{e}}_i$ de orthonormale eigenvectoren van A zijn en de λ_i de eigenwaarden.

Neem $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$

Symmetrische en positief definiete matrices

Bekijk een symmetrische matrix A.

- We noemen A positief semidefiniet als $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} \geq 0$ voor alle $\vec{\mathbf{x}}$.
- Als geldt $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} > 0$ voor $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$, dan heet A positief definiet.

Analoog definiëren we negatief (semi)definiet. Uit de lineaire algebra weten we dat we kunnen schrijven

$$A = O^\top DO = \left[\begin{array}{c|c|c} \vec{\mathbf{e}}_1 & \cdots & \vec{\mathbf{e}}_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \vec{\mathbf{e}}_1^\top \\ \hline \vdots \\ \hline \vec{\mathbf{e}}_n^\top \end{array}\right],$$

waarbij de $\vec{\mathbf{e}}_i$ de orthonormale eigenvectoren van A zijn en de λ_i de eigenwaarden. Neem $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ en schrijf $O\vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & \cdots & \tilde{x}_n \end{bmatrix}^\top$.

Symmetrische en positief definiete matrices

Bekijk een symmetrische matrix A.

- We noemen A positief semidefiniet als $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} \geq 0$ voor alle $\vec{\mathbf{x}}$.
- Als geldt $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} > 0$ voor $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$, dan heet A positief definiet.

Analoog definiëren we negatief (semi)definiet. Uit de lineaire algebra weten we dat we kunnen schrijven

$$A = O^\top D O = \left[\begin{array}{c|c|c} \vec{\mathbf{e}}_1 & \cdots & \vec{\mathbf{e}}_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \vec{\mathbf{e}}_1^\top \\ \hline \vdots \\ \hline \vec{\mathbf{e}}_n^\top \end{array}\right],$$

waarbij de $\vec{\mathbf{e}}_i$ de orthonormale eigenvectoren van A zijn en de λ_i de eigenwaarden. Neem $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ en schrijf $O\vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & \cdots & \tilde{x}_n \end{bmatrix}^\top$. Dan

$$\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}}$$

Symmetrische en positief definiete matrices

Bekijk een symmetrische matrix A.

- We noemen A positief semidefiniet als $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} \geq 0$ voor alle $\vec{\mathbf{x}}$.
- Als geldt $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} > 0$ voor $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$, dan heet A positief definiet.

Analoog definiëren we negatief (semi)definiet. Uit de lineaire algebra weten we dat we kunnen schrijven

$$A = O^\top DO = \left[\begin{array}{c|c|c} \vec{\mathbf{e}}_1 & \cdots & \vec{\mathbf{e}}_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \vec{\mathbf{e}}_1^\top \\ \hline \vdots \\ \hline \vec{\mathbf{e}}_n^\top \end{array}\right],$$

waarbij de $\vec{\mathbf{e}}_i$ de orthonormale eigenvectoren van A zijn en de λ_i de eigenwaarden. Neem $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ en schrijf $O\vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & \cdots & \tilde{x}_n \end{bmatrix}^\top$. Dan

$$\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} = (O\vec{\mathbf{x}})^\top DO\vec{\mathbf{x}}$$

Symmetrische en positief definiete matrices

Bekijk een symmetrische matrix A.

- We noemen A positief semidefiniet als $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} \geq 0$ voor alle $\vec{\mathbf{x}}$.
- Als geldt $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} > 0$ voor $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$, dan heet A positief definiet.

Analoog definiëren we negatief (semi)definiet. Uit de lineaire algebra weten we dat we kunnen schrijven

$$A = O^\top DO = \left[\begin{array}{c|c|c} \vec{\mathbf{e}}_1 & \cdots & \vec{\mathbf{e}}_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \vec{\mathbf{e}}_1^\top \\ \hline \vdots \\ \hline \vec{\mathbf{e}}_n^\top \end{array}\right],$$

waarbij de $\vec{\mathbf{e}}_i$ de orthonormale eigenvectoren van A zijn en de λ_i de eigenwaarden. Neem $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ en schrijf $O\vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & \cdots & \tilde{x}_n \end{bmatrix}^\top$. Dan

$$\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} = (O\vec{\mathbf{x}})^\top DO\vec{\mathbf{x}} = \langle O\vec{\mathbf{x}}, DO\vec{\mathbf{x}}\rangle$$

Symmetrische en positief definiete matrices

Bekijk een symmetrische matrix A.

- We noemen A positief semidefiniet als $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} \geq 0$ voor alle $\vec{\mathbf{x}}$.
- Als geldt $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} > 0$ voor $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$, dan heet A positief definiet.

Analoog definiëren we negatief (semi)definiet. Uit de lineaire algebra weten we dat we kunnen schrijven

$$A = O^\top DO = \left[\begin{array}{c|c|c} \vec{\mathbf{e}}_1 & \cdots & \vec{\mathbf{e}}_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \vec{\mathbf{e}}_1^\top \\ \hline \vdots \\ \hline \vec{\mathbf{e}}_n^\top \end{array}\right],$$

waarbij de $\vec{\mathbf{e}}_i$ de orthonormale eigenvectoren van A zijn en de λ_i de eigenwaarden. Neem $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ en schrijf $O\vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & \cdots & \tilde{x}_n \end{bmatrix}^\top$. Dan

$$\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} = (O\vec{\mathbf{x}})^\top DO\vec{\mathbf{x}} = \langle O\vec{\mathbf{x}}, DO\vec{\mathbf{x}}\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{x}_j^2.$$

Symmetrische en positief definiete matrices

Bekijk een symmetrische matrix A.

- We noemen A positief semidefiniet als $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} \geq 0$ voor alle $\vec{\mathbf{x}}$.
- Als geldt $\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} > 0$ voor $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$, dan heet A positief definiet.

Analoog definiëren we negatief (semi)definiet. Uit de lineaire algebra weten we dat we kunnen schrijven

$$A = O^\top DO = \left[\begin{array}{c|c|c} \vec{\mathbf{e}}_1 & \cdots & \vec{\mathbf{e}}_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \vec{\mathbf{e}}_1^\top \\ \hline \vdots \\ \hline \vec{\mathbf{e}}_n^\top \end{array}\right],$$

waarbij de $\vec{\mathbf{e}}_i$ de orthonormale eigenvectoren van A zijn en de λ_i de eigenwaarden. Neem $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ en schrijf $O\vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & \cdots & \tilde{x}_n \end{bmatrix}^\top$. Dan

$$\vec{\mathbf{x}}^\top A\vec{\mathbf{x}} = (O\vec{\mathbf{x}})^\top DO\vec{\mathbf{x}} = \langle O\vec{\mathbf{x}}, DO\vec{\mathbf{x}}\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{x}_j^2.$$

We zien: A positief definiet $\quad\Leftrightarrow\quad$ alle eigenwaarden zijn positief.

Vinden van extrema (in $\mathbb{R}^2$)

Om extrema te vinden van een differentieerbare functie, zoeken we een punt met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = 0$.

Vinden van extrema (in $\mathbb{R}^2$)

Om extrema te vinden van een differentieerbare functie, zoeken we een punt met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = 0$. We willen dan onderzoeken wat voor punt $\vec{\mathbf{a}}$ is.

Vinden van extrema (in $\mathbb{R}^2$)

Om extrema te vinden van een differentieerbare functie, zoeken we een punt met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = 0$. We willen dan onderzoeken wat voor punt $\vec{\mathbf{a}}$ is. Wanneer f een C^2 functie is, bekijken we de Hessiaan

$$H_f(\vec{\mathbf{a}})$$

Vinden van extrema (in $\mathbb{R}^2$)

Om extrema te vinden van een differentieerbare functie, zoeken we een punt met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = 0$. We willen dan onderzoeken wat voor punt $\vec{\mathbf{a}}$ is. Wanneer f een C^2 functie is, bekijken we de Hessiaan

$$H_f(\vec{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} (D_{11}f)(\vec{\mathbf{a}}) & (D_{12}f)(\vec{\mathbf{a}}) \\ (D_{21}f)(\vec{\mathbf{a}}) & (D_{22}f)(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix}.$$

Vinden van extrema (in $\mathbb{R}^2$)

Om extrema te vinden van een differentieerbare functie, zoeken we een punt met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = 0$. We willen dan onderzoeken wat voor punt $\vec{\mathbf{a}}$ is. Wanneer f een C^2 functie is, bekijken we de Hessiaan

$$H_f(\vec{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} (D_{11}f)(\vec{\mathbf{a}}) & (D_{12}f)(\vec{\mathbf{a}}) \\ (D_{21}f)(\vec{\mathbf{a}}) & (D_{22}f)(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix}.$$

- Als de eigenwaarden van $H_f(\vec{\mathbf{a}})$ kleiner dan 0 zijn ($H_f(\vec{\mathbf{a}})$ is negatief definiet), dan neemt f een sterk lokaal maximum aan.

Vinden van extrema (in $\mathbb{R}^2$)

Om extrema te vinden van een differentieerbare functie, zoeken we een punt met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = 0$. We willen dan onderzoeken wat voor punt $\vec{\mathbf{a}}$ is. Wanneer f een C^2 functie is, bekijken we de Hessiaan

$$H_f(\vec{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} (D_{11}f)(\vec{\mathbf{a}}) & (D_{12}f)(\vec{\mathbf{a}}) \\ (D_{21}f)(\vec{\mathbf{a}}) & (D_{22}f)(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix}.$$

- Als de eigenwaarden van $H_f(\vec{\mathbf{a}})$ kleiner dan 0 zijn ($H_f(\vec{\mathbf{a}})$ is negatief definiet), dan neemt f een sterk lokaal maximum aan.
- Als de eigenwaarden van $H_f(\vec{\mathbf{a}})$ groter dan 0 zijn ($H_f(\vec{\mathbf{a}})$ is positief definiet), dan neemt f een sterk lokaal minimum aan.

Vinden van extrema (in $\mathbb{R}^2$)

Om extrema te vinden van een differentieerbare functie, zoeken we een punt met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = 0$. We willen dan onderzoeken wat voor punt $\vec{\mathbf{a}}$ is. Wanneer f een C^2 functie is, bekijken we de Hessiaan

$$H_f(\vec{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} (D_{11}f)(\vec{\mathbf{a}}) & (D_{12}f)(\vec{\mathbf{a}}) \\ (D_{21}f)(\vec{\mathbf{a}}) & (D_{22}f)(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix}.$$

- Als de eigenwaarden van $H_f(\vec{\mathbf{a}})$ kleiner dan 0 zijn ($H_f(\vec{\mathbf{a}})$ is negatief definiet), dan neemt f een sterk lokaal maximum aan.
- Als de eigenwaarden van $H_f(\vec{\mathbf{a}})$ groter dan 0 zijn ($H_f(\vec{\mathbf{a}})$ is positief definiet), dan neemt f een sterk lokaal minimum aan.
- Als $H_f(\vec{\mathbf{a}})$ zowel positieve als negatieve eigenwaarden heeft (indefiniet), dan heeft f geen extremum in $\vec{\mathbf{a}}$ (zadelpunt).

Vinden van extrema (in $\mathbb{R}^2$)

Om extrema te vinden van een differentieerbare functie, zoeken we een punt met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = 0$. We willen dan onderzoeken wat voor punt $\vec{\mathbf{a}}$ is. Wanneer f een C^2 functie is, bekijken we de Hessiaan

$$H_f(\vec{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} (D_{11}f)(\vec{\mathbf{a}}) & (D_{12}f)(\vec{\mathbf{a}}) \\ (D_{21}f)(\vec{\mathbf{a}}) & (D_{22}f)(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix}.$$

- Als de eigenwaarden van $H_f(\vec{\mathbf{a}})$ kleiner dan 0 zijn ($H_f(\vec{\mathbf{a}})$ is negatief definiet), dan neemt f een sterk lokaal maximum aan.
- Als de eigenwaarden van $H_f(\vec{\mathbf{a}})$ groter dan 0 zijn ($H_f(\vec{\mathbf{a}})$ is positief definiet), dan neemt f een sterk lokaal minimum aan.
- Als $H_f(\vec{\mathbf{a}})$ zowel positieve als negatieve eigenwaarden heeft (indefiniet), dan heeft f geen extremum in $\vec{\mathbf{a}}$ (zadelpunt).

Truc: het teken van de eigenwaarden λ_1, λ_2

Vinden van extrema (in $\mathbb{R}^2$)

Om extrema te vinden van een differentieerbare functie, zoeken we een punt met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = 0$. We willen dan onderzoeken wat voor punt $\vec{\mathbf{a}}$ is. Wanneer f een C^2 functie is, bekijken we de Hessiaan

$$H_f(\vec{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} (D_{11}f)(\vec{\mathbf{a}}) & (D_{12}f)(\vec{\mathbf{a}}) \\ (D_{21}f)(\vec{\mathbf{a}}) & (D_{22}f)(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix}.$$

- Als de eigenwaarden van $H_f(\vec{\mathbf{a}})$ kleiner dan 0 zijn ($H_f(\vec{\mathbf{a}})$ is negatief definiet), dan neemt f een sterk lokaal maximum aan.
- Als de eigenwaarden van $H_f(\vec{\mathbf{a}})$ groter dan 0 zijn ($H_f(\vec{\mathbf{a}})$ is positief definiet), dan neemt f een sterk lokaal minimum aan.
- Als $H_f(\vec{\mathbf{a}})$ zowel positieve als negatieve eigenwaarden heeft (indefiniet), dan heeft f geen extremum in $\vec{\mathbf{a}}$ (zadelpunt).

Truc: het teken van de eigenwaarden λ_1, λ_2 is makkelijk te bepalen door $\operatorname{tr} H_f(\vec{\mathbf{a}}) = \lambda_1 + \lambda_2$ en $\det H_f(\vec{\mathbf{a}}) = \lambda_1\lambda_2$.

Complicaties

Indien de Hessiaan in een stationair punt $\vec{\mathbf{a}}$ te veel eigenwaarden 0 heeft, geeft deze geen informatie.

Complicaties

Indien de Hessiaan in een stationair punt $\vec{\mathbf{a}}$ te veel eigenwaarden 0 heeft, geeft deze geen informatie. We moeten dan op een andere manier het gedrag van f rond $\vec{\mathbf{a}}$ onderzoeken

Complicaties

Indien de Hessiaan in een stationair punt $\vec{\mathbf{a}}$ te veel eigenwaarden 0 heeft, geeft deze geen informatie. We moeten dan op een andere manier het gedrag van f rond $\vec{\mathbf{a}}$ onderzoeken, bijvoorbeeld door naar de niveaukrommen $f(\vec{\mathbf{x}}) = c$ te kijken.

Complicaties

Indien de Hessiaan in een stationair punt $\vec{\mathbf{a}}$ te veel eigenwaarden 0 heeft, geeft deze geen informatie. We moeten dan op een andere manier het gedrag van f rond $\vec{\mathbf{a}}$ onderzoeken, bijvoorbeeld door naar de niveaukrommen $f(\vec{\mathbf{x}}) = c$ te kijken.

Als we bekijken $f : E \to \mathbb{R}$ waar E niet open is

Complicaties

Indien de Hessiaan in een stationair punt $\vec{\mathbf{a}}$ te veel eigenwaarden 0 heeft, geeft deze geen informatie. We moeten dan op een andere manier het gedrag van f rond $\vec{\mathbf{a}}$ onderzoeken, bijvoorbeeld door naar de niveaukrommen $f(\vec{\mathbf{x}}) = c$ te kijken.

Als we bekijken $f \colon E \to \mathbb{R}$ waar E niet open is, zullen we ook naar randextrema moeten zoeken.

Complicaties

Indien de Hessiaan in een stationair punt $\vec{\mathbf{a}}$ te veel eigenwaarden 0 heeft, geeft deze geen informatie. We moeten dan op een andere manier het gedrag van f rond $\vec{\mathbf{a}}$ onderzoeken, bijvoorbeeld door naar de niveaukrommen $f(\vec{\mathbf{x}}) = c$ te kijken.

Als we bekijken $f : E \to \mathbb{R}$ waar E niet open is, zullen we ook naar randextrema moeten zoeken. Hiervoor kunnen we de rand parametriseren

Complicaties

Indien de Hessiaan in een stationair punt $\vec{\mathbf{a}}$ te veel eigenwaarden 0 heeft, geeft deze geen informatie. We moeten dan op een andere manier het gedrag van f rond $\vec{\mathbf{a}}$ onderzoeken, bijvoorbeeld door naar de niveaukrommen $f(\vec{\mathbf{x}}) = c$ te kijken.

Als we bekijken $f : E \to \mathbb{R}$ waar E niet open is, zullen we ook naar randextrema moeten zoeken. Hiervoor kunnen we de rand parametriseren als een kromme $\big(x(t), y(t)\big)$

Complicaties

Indien de Hessiaan in een stationair punt $\vec{\mathbf{a}}$ te veel eigenwaarden 0 heeft, geeft deze geen informatie. We moeten dan op een andere manier het gedrag van f rond $\vec{\mathbf{a}}$ onderzoeken, bijvoorbeeld door naar de niveaukrommen $f(\vec{\mathbf{x}}) = c$ te kijken.

Als we bekijken $f : E \to \mathbb{R}$ waar E niet open is, zullen we ook naar randextrema moeten zoeken. Hiervoor kunnen we de rand parametriseren als een kromme $\big(x(t), y(t)\big)$ en zoeken naar extrema van

$$g(t) = f\big(x(t), y(t)\big).$$

Complicaties

Indien de Hessiaan in een stationair punt $\vec{\mathbf{a}}$ te veel eigenwaarden 0 heeft, geeft deze geen informatie. We moeten dan op een andere manier het gedrag van f rond $\vec{\mathbf{a}}$ onderzoeken, bijvoorbeeld door naar de niveaukrommen $f(\vec{\mathbf{x}}) = c$ te kijken.

Als we bekijken $f\colon E \to \mathbb{R}$ waar E niet open is, zullen we ook naar randextrema moeten zoeken. Hiervoor kunnen we de rand parametriseren als een kromme $\big(x(t), y(t)\big)$ en zoeken naar extrema van

$$g(t) = f\big(x(t), y(t)\big).$$

Vervolgens moeten we onderzoeken of deze ook extrema van f zijn.

Voorbeeld

Bekijk $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$D_1 f(x,y)$$

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$D_1 f(x,y) = 2x + 1$$

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$D_1 f(x,y) = 2x + 1$$
$$D_2 f(x,y)$$

Voorbeeld

Bekijk $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$D_1 f(x, y) = 2x + 1$$
$$D_2 f(x, y) = 2y$$

Voorbeeld

Bekijk $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$\begin{aligned}
D_1 f(x, y) &= 2x + 1 = 0 \\
D_2 f(x, y) &= 2y
\end{aligned}$$

Voorbeeld

Bekijk $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= 2x + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \quad x = -\tfrac{1}{2} \\ D_2 f(x, y) &= 2y \end{aligned}$$

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$D_1 f(x,y) = 2x + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \quad x = -\tfrac{1}{2}$$
$$D_2 f(x,y) = 2y = 0$$

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 2x + 1 = 0 && \Rightarrow \quad x = -\tfrac{1}{2} \\ D_2 f(x,y) &= 2y = 0 && \Rightarrow \quad y = 0 \end{aligned}$$

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 2x + 1 = 0 &\quad\Rightarrow\quad& x = -\tfrac{1}{2} \\ D_2 f(x,y) &= 2y = 0 &\quad\Rightarrow\quad& y = 0 \end{aligned}$$

- We zien $f'(x,y) = 0$ in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 2x + 1 = 0 && \Rightarrow \quad x = -\tfrac{1}{2} \\ D_2 f(x,y) &= 2y = 0 && \Rightarrow \quad y = 0 \end{aligned}$$

- We zien $f'(x,y) = 0$ in $(-\frac{1}{2}, 0)$. Er geldt

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix},$$

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 2x + 1 = 0 && \Rightarrow && x = -\tfrac{1}{2} \\ D_2 f(x,y) &= 2y = 0 && \Rightarrow && y = 0 \end{aligned}$$

- We zien $f'(x,y) = 0$ in $(-\frac{1}{2}, 0)$. Er geldt

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & \\ & \end{pmatrix},$$

Voorbeeld

Bekijk $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= 2x + 1 = 0 & \Rightarrow \quad & x = -\tfrac{1}{2} \\ D_2 f(x, y) &= 2y = 0 & \Rightarrow \quad & y = 0 \end{aligned}$$

- We zien $f'(x, y) = 0$ in $(-\frac{1}{2}, 0)$. Er geldt

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \end{pmatrix},$$

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 2x + 1 = 0 && \Rightarrow \quad x = -\tfrac{1}{2} \\ D_2 f(x,y) &= 2y = 0 && \Rightarrow \quad y = 0 \end{aligned}$$

- We zien $f'(x,y) = 0$ in $(-\frac{1}{2}, 0)$. Er geldt

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Voorbeeld

Bekijk $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= 2x + 1 = 0 && \Rightarrow \quad x = -\tfrac{1}{2} \\ D_2 f(x, y) &= 2y = 0 && \Rightarrow \quad y = 0 \end{aligned}$$

- We zien $f'(x, y) = 0$ in $(-\frac{1}{2}, 0)$. Er geldt

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

  dus $H_f(-\frac{1}{2}, 0)$ is positief definiet

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 2x + 1 = 0 \qquad &\Rightarrow \quad & x = -\tfrac{1}{2} \\ D_2 f(x,y) &= 2y = 0 \qquad &\Rightarrow \quad & y = 0 \end{aligned}$$

- We zien $f'(x,y) = 0$ in $(-\frac{1}{2}, 0)$. Er geldt

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

dus $H_f(-\frac{1}{2}, 0)$ is positief definiet: dit punt is een inwendig sterk minimum.

Voorbeeld

Bekijk $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat f een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat f een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat f een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t)$$

Voorbeeld

Bekijk $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat f een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t$$

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat f een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat f een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$.

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat f een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$t = 0$$

$$t = \pi$$

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat f een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (1,0)$$
$$t = \pi$$

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat f een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (1,0) \\ t = \pi \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (-1,0) \end{aligned}$$

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat f een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$\begin{aligned} t = 0 &\quad \Rightarrow \quad (x,y) = (1,0) \\ t = \pi &\quad \Rightarrow \quad (x,y) = (-1,0) \end{aligned}$$

- Merk op: 0 is een maximum van g.

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat f een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (1,0) \\ t = \pi \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (-1,0) \end{aligned}$$

- Merk op: 0 is een maximum van g. De functie f neemt op E ergens een maximum aan

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat f een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (1,0) \\ t = \pi \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (-1,0) \end{aligned}$$

- Merk op: 0 is een maximum van g. De functie f neemt op E ergens een maximum aan, maar niet in een inwendig punt.

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat f een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (1,0) \\ t = \pi \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (-1,0) \end{aligned}$$

- Merk op: 0 is een maximum van g. De functie f neemt op E ergens een maximum aan, maar niet in een inwendig punt. Dus moet $(1,0)$ een absoluut (sterk) randmaximum van f zijn.

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat f een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (1,0) \\ t = \pi \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (-1,0) \end{aligned}$$

- Merk op: 0 is een maximum van g. De functie f neemt op E ergens een maximum aan, maar niet in een inwendig punt. Dus moet $(1,0)$ een absoluut (sterk) randmaximum van f zijn.
- Het punt π is een minimum van g.

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat f een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (1,0) \\ t = \pi \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (-1,0) \end{aligned}$$

- Merk op: 0 is een maximum van g. De functie f neemt op E ergens een maximum aan, maar niet in een inwendig punt. Dus moet $(1,0)$ een absoluut (sterk) randmaximum van f zijn.
- Het punt π is een minimum van g. Het zou dus kunnen dat $(-1,0)$ een randminimum van f is met $f(-1,0) = 0$.

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat f een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (1,0) \\ t = \pi \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (-1,0) \end{aligned}$$

- Merk op: 0 is een maximum van g. De functie f neemt op E ergens een maximum aan, maar niet in een inwendig punt. Dus moet $(1,0)$ een absoluut (sterk) randmaximum van f zijn.
- Het punt π is een minimum van g. Het zou dus kunnen dat $(-1,0)$ een randminimum van f is met $f(-1,0) = 0$. Echter

$$f(x,0)$$

Voorbeeld

Bekijk $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat f een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x, y) = (1, 0) \\ t = \pi \quad &\Rightarrow \quad (x, y) = (-1, 0) \end{aligned}$$

- Merk op: 0 is een maximum van g. De functie f neemt op E ergens een maximum aan, maar niet in een inwendig punt. Dus moet $(1, 0)$ een absoluut (sterk) randmaximum van f zijn.
- Het punt π is een minimum van g. Het zou dus kunnen dat $(-1, 0)$ een randminimum van f is met $f(-1, 0) = 0$. Echter

$$f(x, 0) = x^2 + x$$

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat f een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (1,0) \\ t = \pi \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (-1,0) \end{aligned}$$

- Merk op: 0 is een maximum van g. De functie f neemt op E ergens een maximum aan, maar niet in een inwendig punt. Dus moet $(1,0)$ een absoluut (sterk) randmaximum van f zijn.
- Het punt π is een minimum van g. Het zou dus kunnen dat $(-1,0)$ een randminimum van f is met $f(-1,0) = 0$. Echter

$$f(x,0) = x^2 + x = x(x+1)$$

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat f een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (1,0) \\ t = \pi \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (-1,0) \end{aligned}$$

- Merk op: 0 is een maximum van g. De functie f neemt op E ergens een maximum aan, maar niet in een inwendig punt. Dus moet $(1,0)$ een absoluut (sterk) randmaximum van f zijn.
- Het punt π is een minimum van g. Het zou dus kunnen dat $(-1,0)$ een randminimum van f is met $f(-1,0) = 0$. Echter

$$f(x,0) = x^2 + x = x(x+1) < 0 \qquad \text{als } x > -1.$$

Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat f een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (1,0) \\ t = \pi \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (-1,0) \end{aligned}$$

- Merk op: 0 is een maximum van g. De functie f neemt op E ergens een maximum aan, maar niet in een inwendig punt. Dus moet $(1,0)$ een absoluut (sterk) randmaximum van f zijn.
- Het punt π is een minimum van g. Het zou dus kunnen dat $(-1,0)$ een randminimum van f is met $f(-1,0) = 0$. Echter

  $$f(x,0) = x^2 + x = x(x+1) < 0 \qquad \text{als } x > -1.$$

  We concluderen dat $(-1,0)$ geen extremum van f is.