# Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

## Extrema in $\mathbb{R}^n$ (22)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

# Vinden van extrema (in $\mathbb{R}^2$)

Om extrema te vinden van een differentieerbare functie, zoeken we een punt met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = 0$.

# Vinden van extrema (in $\mathbb{R}^2$)

Om extrema te vinden van een differentieerbare functie, zoeken we een punt met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = 0$. We willen dan onderzoeken wat voor punt $\vec{\mathbf{a}}$ is.

# Vinden van extrema (in $\mathbb{R}^2$)

Om extrema te vinden van een differentieerbare functie, zoeken we een punt met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = 0$. We willen dan onderzoeken wat voor punt $\vec{\mathbf{a}}$ is. Wanneer $f$ een $C^2$ functie is, bekijken we de Hessiaan

$$H_f(\vec{\mathbf{a}})$$

# Vinden van extrema (in $\mathbb{R}^2$)

Om extrema te vinden van een differentieerbare functie, zoeken we een punt met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = 0$. We willen dan onderzoeken wat voor punt $\vec{\mathbf{a}}$ is. Wanneer $f$ een $C^2$ functie is, bekijken we de Hessiaan

$$H_f(\vec{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} (D_{11}f)(\vec{\mathbf{a}}) & (D_{12}f)(\vec{\mathbf{a}}) \\ (D_{21}f)(\vec{\mathbf{a}}) & (D_{22}f)(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix}.$$

# Vinden van extrema (in $\mathbb{R}^2$)

Om extrema te vinden van een differentieerbare functie, zoeken we een punt met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = 0$. We willen dan onderzoeken wat voor punt $\vec{\mathbf{a}}$ is. Wanneer $f$ een $C^2$ functie is, bekijken we de Hessiaan

$$H_f(\vec{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} (D_{11}f)(\vec{\mathbf{a}}) & (D_{12}f)(\vec{\mathbf{a}}) \\ (D_{21}f)(\vec{\mathbf{a}}) & (D_{22}f)(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix}.$$

- Als de eigenwaarden van $H_f(\vec{\mathbf{a}})$ kleiner dan 0 zijn ($H_f(\vec{\mathbf{a}})$ is negatief definiet), dan neemt $f$ een sterk lokaal maximum aan.

# Vinden van extrema (in $\mathbb{R}^2$)

Om extrema te vinden van een differentieerbare functie, zoeken we een punt met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = 0$. We willen dan onderzoeken wat voor punt $\vec{\mathbf{a}}$ is. Wanneer $f$ een $C^2$ functie is, bekijken we de Hessiaan

$$H_f(\vec{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} (D_{11}f)(\vec{\mathbf{a}}) & (D_{12}f)(\vec{\mathbf{a}}) \\ (D_{21}f)(\vec{\mathbf{a}}) & (D_{22}f)(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix}.$$

- Als de eigenwaarden van $H_f(\vec{\mathbf{a}})$ kleiner dan 0 zijn ($H_f(\vec{\mathbf{a}})$ is negatief definiet), dan neemt $f$ een sterk lokaal maximum aan.
- Als de eigenwaarden van $H_f(\vec{\mathbf{a}})$ groter dan 0 zijn ($H_f(\vec{\mathbf{a}})$ is positief definiet), dan neemt $f$ een sterk lokaal minimum aan.

# Vinden van extrema (in $\mathbb{R}^2$)

Om extrema te vinden van een differentieerbare functie, zoeken we een punt met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = 0$. We willen dan onderzoeken wat voor punt $\vec{\mathbf{a}}$ is. Wanneer $f$ een $C^2$ functie is, bekijken we de Hessiaan

$$H_f(\vec{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} (D_{11}f)(\vec{\mathbf{a}}) & (D_{12}f)(\vec{\mathbf{a}}) \\ (D_{21}f)(\vec{\mathbf{a}}) & (D_{22}f)(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix}.$$

- Als de eigenwaarden van $H_f(\vec{\mathbf{a}})$ kleiner dan 0 zijn ($H_f(\vec{\mathbf{a}})$ is negatief definiet), dan neemt $f$ een sterk lokaal maximum aan.
- Als de eigenwaarden van $H_f(\vec{\mathbf{a}})$ groter dan 0 zijn ($H_f(\vec{\mathbf{a}})$ is positief definiet), dan neemt $f$ een sterk lokaal minimum aan.
- Als $H_f(\vec{\mathbf{a}})$ zowel positieve als negatieve eigenwaarden heeft (indefiniet), dan heeft $f$ geen extremum in $\vec{\mathbf{a}}$ (zadelpunt).

# Vinden van extrema (in $\mathbb{R}^2$)

Om extrema te vinden van een differentieerbare functie, zoeken we een punt met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = 0$. We willen dan onderzoeken wat voor punt $\vec{\mathbf{a}}$ is. Wanneer $f$ een $C^2$ functie is, bekijken we de Hessiaan

$$H_f(\vec{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} (D_{11}f)(\vec{\mathbf{a}}) & (D_{12}f)(\vec{\mathbf{a}}) \\ (D_{21}f)(\vec{\mathbf{a}}) & (D_{22}f)(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix}.$$

- Als de eigenwaarden van $H_f(\vec{\mathbf{a}})$ kleiner dan 0 zijn ($H_f(\vec{\mathbf{a}})$ is negatief definiet), dan neemt $f$ een sterk lokaal maximum aan.
- Als de eigenwaarden van $H_f(\vec{\mathbf{a}})$ groter dan 0 zijn ($H_f(\vec{\mathbf{a}})$ is positief definiet), dan neemt $f$ een sterk lokaal minimum aan.
- Als $H_f(\vec{\mathbf{a}})$ zowel positieve als negatieve eigenwaarden heeft (indefiniet), dan heeft $f$ geen extremum in $\vec{\mathbf{a}}$ (zadelpunt).

Truc: het teken van de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2$

# Vinden van extrema (in $\mathbb{R}^2$)

Om extrema te vinden van een differentieerbare functie, zoeken we een punt met $f'(\vec{\mathbf{a}}) = 0$. We willen dan onderzoeken wat voor punt $\vec{\mathbf{a}}$ is. Wanneer $f$ een $C^2$ functie is, bekijken we de Hessiaan

$$H_f(\vec{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} (D_{11}f)(\vec{\mathbf{a}}) & (D_{12}f)(\vec{\mathbf{a}}) \\ (D_{21}f)(\vec{\mathbf{a}}) & (D_{22}f)(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix}.$$

- Als de eigenwaarden van $H_f(\vec{\mathbf{a}})$ kleiner dan 0 zijn ($H_f(\vec{\mathbf{a}})$ is negatief definiet), dan neemt $f$ een sterk lokaal maximum aan.
- Als de eigenwaarden van $H_f(\vec{\mathbf{a}})$ groter dan 0 zijn ($H_f(\vec{\mathbf{a}})$ is positief definiet), dan neemt $f$ een sterk lokaal minimum aan.
- Als $H_f(\vec{\mathbf{a}})$ zowel positieve als negatieve eigenwaarden heeft (indefiniet), dan heeft $f$ geen extremum in $\vec{\mathbf{a}}$ (zadelpunt).

Truc: het teken van de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2$ is makkelijk te bepalen door $\operatorname{tr} H_f(\vec{\mathbf{a}}) = \lambda_1 + \lambda_2$ en $\det H_f(\vec{\mathbf{a}}) = \lambda_1\lambda_2$.

# Complicaties

Indien de Hessiaan in een stationair punt $\vec{\mathbf{a}}$ te veel eigenwaarden 0 heeft, geeft deze geen informatie.

# Complicaties

Indien de Hessiaan in een stationair punt $\vec{\mathbf{a}}$ te veel eigenwaarden 0 heeft, geeft deze geen informatie. We moeten dan op een andere manier het gedrag van $f$ rond $\vec{\mathbf{a}}$ onderzoeken

# Complicaties

Indien de Hessiaan in een stationair punt $\vec{\mathbf{a}}$ te veel eigenwaarden 0 heeft, geeft deze geen informatie. We moeten dan op een andere manier het gedrag van $f$ rond $\vec{\mathbf{a}}$ onderzoeken, bijvoorbeeld door naar de niveaukrommen $f(\vec{\mathbf{x}}) = c$ te kijken.

# Complicaties

Indien de Hessiaan in een stationair punt $\vec{\mathbf{a}}$ te veel eigenwaarden 0 heeft, geeft deze geen informatie. We moeten dan op een andere manier het gedrag van $f$ rond $\vec{\mathbf{a}}$ onderzoeken, bijvoorbeeld door naar de niveaukrommen $f(\vec{\mathbf{x}}) = c$ te kijken.

Als we bekijken $f\colon E \to \mathbb{R}$ waar $E$ niet open is

# Complicaties

Indien de Hessiaan in een stationair punt $\vec{\mathbf{a}}$ te veel eigenwaarden 0 heeft, geeft deze geen informatie. We moeten dan op een andere manier het gedrag van $f$ rond $\vec{\mathbf{a}}$ onderzoeken, bijvoorbeeld door naar de niveaukrommen $f(\vec{\mathbf{x}}) = c$ te kijken.

Als we bekijken $f\colon E \to \mathbb{R}$ waar $E$ niet open is, zullen we ook naar randextrema moeten zoeken.

# Complicaties

Indien de Hessiaan in een stationair punt $\vec{\mathbf{a}}$ te veel eigenwaarden 0 heeft, geeft deze geen informatie. We moeten dan op een andere manier het gedrag van $f$ rond $\vec{\mathbf{a}}$ onderzoeken, bijvoorbeeld door naar de niveaukrommen $f(\vec{\mathbf{x}}) = c$ te kijken.

Als we bekijken $f : E \to \mathbb{R}$ waar $E$ niet open is, zullen we ook naar randextrema moeten zoeken. Hiervoor kunnen we de rand parametriseren

# Complicaties

Indien de Hessiaan in een stationair punt $\vec{\mathbf{a}}$ te veel eigenwaarden 0 heeft, geeft deze geen informatie. We moeten dan op een andere manier het gedrag van $f$ rond $\vec{\mathbf{a}}$ onderzoeken, bijvoorbeeld door naar de niveaukrommen $f(\vec{\mathbf{x}}) = c$ te kijken.

Als we bekijken $f : E \to \mathbb{R}$ waar $E$ niet open is, zullen we ook naar randextrema moeten zoeken. Hiervoor kunnen we de rand parametriseren als een kromme $\big(x(t), y(t)\big)$

# Complicaties

Indien de Hessiaan in een stationair punt $\vec{\mathbf{a}}$ te veel eigenwaarden 0 heeft, geeft deze geen informatie. We moeten dan op een andere manier het gedrag van $f$ rond $\vec{\mathbf{a}}$ onderzoeken, bijvoorbeeld door naar de niveaukrommen $f(\vec{\mathbf{x}}) = c$ te kijken.

Als we bekijken $f : E \to \mathbb{R}$ waar $E$ niet open is, zullen we ook naar randextrema moeten zoeken. Hiervoor kunnen we de rand parametriseren als een kromme $\big(x(t), y(t)\big)$ en zoeken naar extrema van

$$g(t) = f\big(x(t), y(t)\big).$$

# Complicaties

Indien de Hessiaan in een stationair punt $\vec{\mathbf{a}}$ te veel eigenwaarden 0 heeft, geeft deze geen informatie. We moeten dan op een andere manier het gedrag van $f$ rond $\vec{\mathbf{a}}$ onderzoeken, bijvoorbeeld door naar de niveaukrommen $f(\vec{\mathbf{x}}) = c$ te kijken.

Als we bekijken $f : E \to \mathbb{R}$ waar $E$ niet open is, zullen we ook naar randextrema moeten zoeken. Hiervoor kunnen we de rand parametriseren als een kromme $\big(x(t), y(t)\big)$ en zoeken naar extrema van

$$g(t) = f\big(x(t), y(t)\big).$$

Vervolgens moeten we onderzoeken of deze ook extrema van $f$ zijn.

# Voorbeeld

Bekijk $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$D_1 f(x,y)$$

# Voorbeeld

Bekijk $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$D_1 f(x, y) = 2x + 1$$

# Voorbeeld

Bekijk $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$D_1 f(x, y) = 2x + 1$$
$$D_2 f(x, y)$$

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$D_1 f(x,y) = 2x + 1$$
$$D_2 f(x,y) = 2y$$

# Voorbeeld

Bekijk $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= 2x + 1 = 0 \\ D_2 f(x, y) &= 2y \end{aligned}$$

# Voorbeeld

Bekijk $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= 2x + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \quad x = -\tfrac{1}{2} \\ D_2 f(x, y) &= 2y \end{aligned}$$

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$D_1 f(x,y) = 2x + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \quad x = -\tfrac{1}{2}$$
$$D_2 f(x,y) = 2y = 0$$

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 2x + 1 = 0 \qquad &\Rightarrow \quad & x = -\tfrac{1}{2} \\ D_2 f(x,y) &= 2y = 0 \qquad &\Rightarrow \quad & y = 0 \end{aligned}$$

# Voorbeeld

Bekijk $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= 2x + 1 = 0 \qquad &\Rightarrow \quad x = -\tfrac{1}{2} \\ D_2 f(x, y) &= 2y = 0 \qquad &\Rightarrow \quad y = 0 \end{aligned}$$

- We zien $f'(x, y) = 0$ in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 2x + 1 = 0 && \Rightarrow \quad x = -\tfrac{1}{2} \\ D_2 f(x,y) &= 2y = 0 && \Rightarrow \quad y = 0 \end{aligned}$$

- We zien $f'(x,y) = 0$ in $(-\frac{1}{2}, 0)$. Er geldt

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix},$$

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 2x + 1 = 0 &\quad\Rightarrow\quad& x = -\tfrac{1}{2} \\ D_2 f(x,y) &= 2y = 0 &\quad\Rightarrow\quad& y = 0 \end{aligned}$$

- We zien $f'(x,y) = 0$ in $(-\frac{1}{2}, 0)$. Er geldt

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & \\ & \end{pmatrix},$$

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 2x + 1 = 0 && \Rightarrow \quad x = -\tfrac{1}{2} \\ D_2 f(x,y) &= 2y = 0 && \Rightarrow \quad y = 0 \end{aligned}$$

- We zien $f'(x,y) = 0$ in $(-\frac{1}{2}, 0)$. Er geldt

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \end{pmatrix},$$

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 2x + 1 = 0 \qquad &\Rightarrow \quad x = -\tfrac{1}{2} \\ D_2 f(x,y) &= 2y = 0 \qquad &\Rightarrow \quad y = 0 \end{aligned}$$

- We zien $f'(x,y) = 0$ in $(-\frac{1}{2}, 0)$. Er geldt

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 2x + 1 = 0 \qquad &&\Rightarrow \quad x = -\tfrac{1}{2} \\ D_2 f(x,y) &= 2y = 0 \qquad &&\Rightarrow \quad y = 0 \end{aligned}$$

- We zien $f'(x,y) = 0$ in $(-\frac{1}{2}, 0)$. Er geldt

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

dus $H_f(-\frac{1}{2}, 0)$ is positief definiet

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 2x + 1 = 0 && \Rightarrow \quad x = -\tfrac{1}{2} \\ D_2 f(x,y) &= 2y = 0 && \Rightarrow \quad y = 0 \end{aligned}$$

- We zien $f'(x,y) = 0$ in $(-\frac{1}{2}, 0)$. Er geldt

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

dus $H_f(-\frac{1}{2}, 0)$ is positief definiet: dit punt is een inwendig sterk minimum.

# Voorbeeld

Bekijk $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat $f$ een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat $f$ een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat $f$ een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t)$$

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat $f$ een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t$$

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat $f$ een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat $f$ een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$.

# Voorbeeld

Bekijk $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat $f$ een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$t = 0$$

$$t = \pi$$

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat $f$ een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (1,0)$$
$$t = \pi$$

# Voorbeeld

Bekijk $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat $f$ een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x, y) = (1, 0) \\ t = \pi \quad &\Rightarrow \quad (x, y) = (-1, 0) \end{aligned}$$

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat $f$ een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (1,0) \\ t = \pi \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (-1,0) \end{aligned}$$

- Merk op: 0 is een maximum van $g$.

# Voorbeeld

Bekijk $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat $f$ een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x, y) = (1, 0) \\ t = \pi \quad &\Rightarrow \quad (x, y) = (-1, 0) \end{aligned}$$

- Merk op: 0 is een maximum van $g$. De functie $f$ neemt op $E$ ergens een maximum aan

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat $f$ een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (1,0) \\ t = \pi \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (-1,0) \end{aligned}$$

- Merk op: 0 is een maximum van $g$. De functie $f$ neemt op $E$ ergens een maximum aan, maar niet in een inwendig punt.

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat $f$ een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (1,0) \\ t = \pi \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (-1,0) \end{aligned}$$

- Merk op: 0 is een maximum van $g$. De functie $f$ neemt op $E$ ergens een maximum aan, maar niet in een inwendig punt. Dus moet $(1,0)$ een absoluut (sterk) randmaximum van $f$ zijn.

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat $f$ een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (1,0) \\ t = \pi \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (-1,0) \end{aligned}$$

- Merk op: 0 is een maximum van $g$. De functie $f$ neemt op $E$ ergens een maximum aan, maar niet in een inwendig punt. Dus moet $(1,0)$ een absoluut (sterk) randmaximum van $f$ zijn.
- Het punt $\pi$ is een minimum van $g$.

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat $f$ een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (1,0) \\ t = \pi \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (-1,0) \end{aligned}$$

- Merk op: 0 is een maximum van $g$. De functie $f$ neemt op $E$ ergens een maximum aan, maar niet in een inwendig punt. Dus moet $(1,0)$ een absoluut (sterk) randmaximum van $f$ zijn.
- Het punt $\pi$ is een minimum van $g$. Het zou dus kunnen dat $(-1,0)$ een randminimum van $f$ is met $f(-1,0) = 0$.

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat $f$ een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (1,0) \\ t = \pi \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (-1,0) \end{aligned}$$

- Merk op: 0 is een maximum van $g$. De functie $f$ neemt op $E$ ergens een maximum aan, maar niet in een inwendig punt. Dus moet $(1,0)$ een absoluut (sterk) randmaximum van $f$ zijn.
- Het punt $\pi$ is een minimum van $g$. Het zou dus kunnen dat $(-1,0)$ een randminimum van $f$ is met $f(-1,0) = 0$. Echter

$$f(x,0)$$

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat $f$ een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (1,0) \\ t = \pi \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (-1,0) \end{aligned}$$

- Merk op: 0 is een maximum van $g$. De functie $f$ neemt op $E$ ergens een maximum aan, maar niet in een inwendig punt. Dus moet $(1,0)$ een absoluut (sterk) randmaximum van $f$ zijn.
- Het punt $\pi$ is een minimum van $g$. Het zou dus kunnen dat $(-1,0)$ een randminimum van $f$ is met $f(-1,0) = 0$. Echter

$$f(x,0) = x^2 + x$$

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat $f$ een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (1,0) \\ t = \pi \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (-1,0) \end{aligned}$$

- Merk op: 0 is een maximum van $g$. De functie $f$ neemt op $E$ ergens een maximum aan, maar niet in een inwendig punt. Dus moet $(1,0)$ een absoluut (sterk) randmaximum van $f$ zijn.
- Het punt $\pi$ is een minimum van $g$. Het zou dus kunnen dat $(-1,0)$ een randminimum van $f$ is met $f(-1,0) = 0$. Echter

$$f(x,0) = x^2 + x = x(x+1)$$

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat $f$ een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (1,0) \\ t = \pi \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (-1,0) \end{aligned}$$

- Merk op: 0 is een maximum van $g$. De functie $f$ neemt op $E$ ergens een maximum aan, maar niet in een inwendig punt. Dus moet $(1,0)$ een absoluut (sterk) randmaximum van $f$ zijn.
- Het punt $\pi$ is een minimum van $g$. Het zou dus kunnen dat $(-1,0)$ een randminimum van $f$ is met $f(-1,0) = 0$. Echter

$$f(x,0) = x^2 + x = x(x+1) < 0 \quad \text{als } x > -1.$$

# Voorbeeld

Bekijk $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. We hebben gezien dat $f$ een inwendig sterk minimum heeft in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- We parametriseren de rand met $(\cos t, \sin t)$ waar $t \in [0, 2\pi)$:

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is $g'(t) = -\sin t$. We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (1,0) \\ t = \pi \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (-1,0) \end{aligned}$$

- Merk op: 0 is een maximum van $g$. De functie $f$ neemt op $E$ ergens een maximum aan, maar niet in een inwendig punt. Dus moet $(1,0)$ een absoluut (sterk) randmaximum van $f$ zijn.
- Het punt $\pi$ is een minimum van $g$. Het zou dus kunnen dat $(-1,0)$ een randminimum van $f$ is met $f(-1,0) = 0$. Echter

  $$f(x,0) = x^2 + x = x(x+1) < 0 \quad \text{als } x > -1.$$

  We concluderen dat $(-1,0)$ geen extremum van $f$ is.

# Samengevat

Bekijk een functie $f$ op een gesloten gebied $E \subset \mathbb{R}^2$ met rand. We willen de extrema van $f$ vinden:

# Samengevat

Bekijk een functie $f$ op een gesloten gebied $E \subset \mathbb{R}^2$ met rand. We willen de extrema van $f$ vinden:

- Bepaal $D_1 f$ en $D_2 f$

# Samengevat

Bekijk een functie $f$ op een gesloten gebied $E \subset \mathbb{R}^2$ met rand. We willen de extrema van $f$ vinden:

- Bepaal $D_1 f$ en $D_2 f$ en stel deze gelijk aan nul om de (inwendige) stationaire punten te vinden.

# Samengevat

Bekijk een functie $f$ op een gesloten gebied $E \subset \mathbb{R}^2$ met rand. We willen de extrema van $f$ vinden:

- Bepaal $D_1 f$ en $D_2 f$ en stel deze gelijk aan nul om de (inwendige) stationaire punten te vinden.
- Bepaal $D_{11} f$, $D_{12} f$ en $D_{22} f$

# Samengevat

Bekijk een functie $f$ op een gesloten gebied $E \subset \mathbb{R}^2$ met rand. We willen de extrema van $f$ vinden:

- Bepaal $D_1 f$ en $D_2 f$ en stel deze gelijk aan nul om de (inwendige) stationaire punten te vinden.
- Bepaal $D_{11} f$, $D_{12} f$ en $D_{22} f$ en vul de stationaire punten in om de Hessiaan in elk punt te berekenen.

# Samengevat

Bekijk een functie $f$ op een gesloten gebied $E \subset \mathbb{R}^2$ met rand. We willen de extrema van $f$ vinden:

- Bepaal $D_1 f$ en $D_2 f$ en stel deze gelijk aan nul om de (inwendige) stationaire punten te vinden.
- Bepaal $D_{11} f$, $D_{12} f$ en $D_{22} f$ en vul de stationaire punten in om de Hessiaan in elk punt te berekenen.
- Als er geen eigenwaarden 0 voorkomen, kunnen we inwendige extrema classificeren.

# Samengevat

Bekijk een functie $f$ op een gesloten gebied $E \subset \mathbb{R}^2$ met rand. We willen de extrema van $f$ vinden:

- Bepaal $D_1 f$ en $D_2 f$ en stel deze gelijk aan nul om de (inwendige) stationaire punten te vinden.
- Bepaal $D_{11} f$, $D_{12} f$ en $D_{22} f$ en vul de stationaire punten in om de Hessiaan in elk punt te berekenen.
- Als er geen eigenwaarden 0 voorkomen, kunnen we inwendige extrema classificeren. Bestudeer anders het gedrag van $f$ rondom de stationaire punten.

# Samengevat

Bekijk een functie $f$ op een gesloten gebied $E \subset \mathbb{R}^2$ met rand. We willen de extrema van $f$ vinden:

- Bepaal $D_1 f$ en $D_2 f$ en stel deze gelijk aan nul om de (inwendige) stationaire punten te vinden.
- Bepaal $D_{11} f$, $D_{12} f$ en $D_{22} f$ en vul de stationaire punten in om de Hessiaan in elk punt te berekenen.
- Als er geen eigenwaarden 0 voorkomen, kunnen we inwendige extrema classificeren. Bestudeer anders het gedrag van $f$ rondom de stationaire punten.
- Parametriseer vervolgens de rand (evt. in stukken) met een $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$.

# Samengevat

Bekijk een functie $f$ op een gesloten gebied $E \subset \mathbb{R}^2$ met rand. We willen de extrema van $f$ vinden:

- Bepaal $D_1 f$ en $D_2 f$ en stel deze gelijk aan nul om de (inwendige) stationaire punten te vinden.
- Bepaal $D_{11} f$, $D_{12} f$ en $D_{22} f$ en vul de stationaire punten in om de Hessiaan in elk punt te berekenen.
- Als er geen eigenwaarden 0 voorkomen, kunnen we inwendige extrema classificeren. Bestudeer anders het gedrag van $f$ rondom de stationaire punten.
- Parametriseer vervolgens de rand (evt. in stukken) met een $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$.
- Bepaal de extreme punten van $g$, bijv. door $g' = 0$ op te lossen.

# Samengevat

Bekijk een functie $f$ op een gesloten gebied $E \subset \mathbb{R}^2$ met rand. We willen de extrema van $f$ vinden:

- Bepaal $D_1 f$ en $D_2 f$ en stel deze gelijk aan nul om de (inwendige) stationaire punten te vinden.
- Bepaal $D_{11} f$, $D_{12} f$ en $D_{22} f$ en vul de stationaire punten in om de Hessiaan in elk punt te berekenen.
- Als er geen eigenwaarden 0 voorkomen, kunnen we inwendige extrema classificeren. Bestudeer anders het gedrag van $f$ rondom de stationaire punten.
- Parametriseer vervolgens de rand (evt. in stukken) met een $g \colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$.
- Bepaal de extreme punten van $g$, bijv. door $g' = 0$ op te lossen. Let ook op de randwaarden $g(a)$ en $g(b)$.

# Samengevat

Bekijk een functie $f$ op een gesloten gebied $E \subset \mathbb{R}^2$ met rand. We willen de extrema van $f$ vinden:

- Bepaal $D_1 f$ en $D_2 f$ en stel deze gelijk aan nul om de (inwendige) stationaire punten te vinden.
- Bepaal $D_{11} f$, $D_{12} f$ en $D_{22} f$ en vul de stationaire punten in om de Hessiaan in elk punt te berekenen.
- Als er geen eigenwaarden 0 voorkomen, kunnen we inwendige extrema classificeren. Bestudeer anders het gedrag van $f$ rondom de stationaire punten.
- Parametriseer vervolgens de rand (evt. in stukken) met een $g \colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$.
- Bepaal de extreme punten van $g$, bijv. door $g' = 0$ op te lossen. Let ook op de randwaarden $g(a)$ en $g(b)$.
- Controleer voor elk extremum van $g$ of dit correspondeert met een extremum van $f$

# Samengevat

Bekijk een functie $f$ op een gesloten gebied $E \subset \mathbb{R}^2$ met rand. We willen de extrema van $f$ vinden:

- Bepaal $D_1 f$ en $D_2 f$ en stel deze gelijk aan nul om de (inwendige) stationaire punten te vinden.
- Bepaal $D_{11} f$, $D_{12} f$ en $D_{22} f$ en vul de stationaire punten in om de Hessiaan in elk punt te berekenen.
- Als er geen eigenwaarden 0 voorkomen, kunnen we inwendige extrema classificeren. Bestudeer anders het gedrag van $f$ rondom de stationaire punten.
- Parametriseer vervolgens de rand (evt. in stukken) met een $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$.
- Bepaal de extreme punten van $g$, bijv. door $g' = 0$ op te lossen. Let ook op de randwaarden $g(a)$ en $g(b)$.
- Controleer voor elk extremum van $g$ of dit correspondeert met een extremum van $f$, bijv. door
  - te gebruiken dat iedere continue functie een minimum en maximum moet aannemen op een compact gebied,

# Samengevat

Bekijk een functie $f$ op een gesloten gebied $E \subset \mathbb{R}^2$ met rand. We willen de extrema van $f$ vinden:

- Bepaal $D_1 f$ en $D_2 f$ en stel deze gelijk aan nul om de (inwendige) stationaire punten te vinden.
- Bepaal $D_{11} f$, $D_{12} f$ en $D_{22} f$ en vul de stationaire punten in om de Hessiaan in elk punt te berekenen.
- Als er geen eigenwaarden 0 voorkomen, kunnen we inwendige extrema classificeren. Bestudeer anders het gedrag van $f$ rondom de stationaire punten.
- Parametriseer vervolgens de rand (evt. in stukken) met een $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$.
- Bepaal de extreme punten van $g$, bijv. door $g' = 0$ op te lossen. Let ook op de randwaarden $g(a)$ en $g(b)$.
- Controleer voor elk extremum van $g$ of dit correspondeert met een extremum van $f$, bijv. door
  - te gebruiken dat iedere continue functie een minimum en maximum moet aannemen op een compact gebied,
  - punten in een omgeving van het extremum in $f$ in te vullen, of

# Samengevat

Bekijk een functie $f$ op een gesloten gebied $E \subset \mathbb{R}^2$ met rand. We willen de extrema van $f$ vinden:

- Bepaal $D_1 f$ en $D_2 f$ en stel deze gelijk aan nul om de (inwendige) stationaire punten te vinden.
- Bepaal $D_{11} f$, $D_{12} f$ en $D_{22} f$ en vul de stationaire punten in om de Hessiaan in elk punt te berekenen.
- Als er geen eigenwaarden 0 voorkomen, kunnen we inwendige extrema classificeren. Bestudeer anders het gedrag van $f$ rondom de stationaire punten.
- Parametriseer vervolgens de rand (evt. in stukken) met een $g \colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$.
- Bepaal de extreme punten van $g$, bijv. door $g' = 0$ op te lossen. Let ook op de randwaarden $g(a)$ en $g(b)$.
- Controleer voor elk extremum van $g$ of dit correspondeert met een extremum van $f$, bijv. door
    - te gebruiken dat iedere continue functie een minimum en maximum moet aannemen op een compact gebied,
    - punten in een omgeving van het extremum in $f$ in te vullen, of
    - naar het teken van de afgeleides $D_1 f$ en $D_2 f$ te kijken.