

## Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

### Extrema in $\mathbb{R}^n$ (22)

Gerrit Oomens  
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde  
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica  
Universiteit van Amsterdam



## Vinden van extrema (in $\mathbb{R}^2$ )

Om extrema te vinden van een differentieerbare functie, zoeken we een punt met  $f'(\vec{a}) = 0$ . We willen dan onderzoeken wat voor punt  $\vec{a}$  is. Wanneer  $f$  een  $C^2$  functie is, bekijken we de **Hessiaan**

$$H_f(\vec{a}) = \begin{bmatrix} (D_{11}f)(\vec{a}) & (D_{12}f)(\vec{a}) \\ (D_{21}f)(\vec{a}) & (D_{22}f)(\vec{a}) \end{bmatrix}.$$

- Als de eigenwaarden van  $H_f(\vec{a})$  kleiner dan 0 zijn ( $H_f(\vec{a})$  is **negatief definitief**), dan neemt  $f$  een sterk lokaal maximum aan.
- Als de eigenwaarden van  $H_f(\vec{a})$  groter dan 0 zijn ( $H_f(\vec{a})$  is **positief definitief**), dan neemt  $f$  een sterk lokaal minimum aan.
- Als  $H_f(\vec{a})$  zowel positieve als negatieve eigenwaarden heeft (**indefinitief**), dan heeft  $f$  geen extremum in  $\vec{a}$  (**zadelpunt**).

Truc: het teken van de eigenwaarden  $\lambda_1, \lambda_2$  is makkelijk te bepalen door  $\text{tr } H_f(\vec{a}) = \lambda_1 + \lambda_2$  en  $\det H_f(\vec{a}) = \lambda_1 \lambda_2$ .

## Complicaties

Indien de Hessiaan in een stationair punt  $\vec{a}$  te veel eigenwaarden 0 heeft, geeft deze geen informatie. We moeten dan op een andere manier het gedrag van  $f$  rond  $\vec{a}$  onderzoeken, bijvoorbeeld door naar de **niveaokrommen**  $f(\vec{x}) = c$  te kijken.

Als we bekijken  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  waar  $E$  niet open is, zullen we ook naar randextrema moeten zoeken. Hiervoor kunnen we de rand parametriseren als een kromme  $(x(t), y(t))$  en zoeken naar extrema van

$$g(t) = f(x(t), y(t)).$$

Vervolgens moeten we onderzoeken of deze ook extrema van  $f$  zijn.

## Voorbeeld

Bekijk  $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$  op  $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

- We bepalen de partiële afgeleiden:

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) = 2x + 1 = 0 & \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ D_2 f(x, y) = 2y = 0 & \Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

- We zien  $f'(x, y) = 0$  in  $(-\frac{1}{2}, 0)$ . Er geldt

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

dus  $H_f(-\frac{1}{2}, 0)$  is positief definitief: dit punt is een inwendig sterk minimum.

## Voorbeeld

Bekijk  $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$  op  $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . We hebben gezien dat  $f$  een inwendig sterk minimum heeft in  $(-\frac{1}{2}, 0)$ .

- We parametriseren de rand met  $(\cos t, \sin t)$  waar  $t \in [0, 2\pi)$ :

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t = 1 + \cos t.$$

- Dan is  $g'(t) = -\sin t$ . We vinden 2 mogelijke randextrema:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (1, 0)$$

$$t = \pi \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (-1, 0)$$

- Merk op: 0 is een maximum van  $g$ . De functie  $f$  neemt op  $E$  ergens een maximum aan, maar niet in een inwendig punt. Dus moet  $(1, 0)$  een absoluut (sterk) randmaximum van  $f$  zijn.
- Het punt  $\pi$  is een minimum van  $g$ . Het zou dus kunnen dat  $(-1, 0)$  een randminimum van  $f$  is met  $f(-1, 0) = 0$ . Echter

$$f(x, 0) = x^2 + x = x(x + 1) < 0 \quad \text{als } x > -1.$$

We concluderen dat  $(-1, 0)$  geen extremum van  $f$  is.

## Samengevat

Bekijk een functie  $f$  op een gesloten gebied  $E \subset \mathbb{R}^2$  met rand. We willen de extrema van  $f$  vinden:

- Bepaal  $D_1 f$  en  $D_2 f$  en stel deze gelijk aan nul om de (inwendige) stationaire punten te vinden.
- Bepaal  $D_{11} f$ ,  $D_{12} f$  en  $D_{22} f$  en vul de stationaire punten in om de Hessiaan in elk punt te berekenen.
- Als er geen eigenwaarden 0 voorkomen, kunnen we inwendige extrema classificeren. Bestudeer anders het gedrag van  $f$  rondom de stationaire punten.
- Parametriseer vervolgens de rand (evt. in stukken) met een  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ .
- Bepaal de extreme punten van  $g$ , bijv. door  $g' = 0$  op te lossen. Let ook op de randwaarden  $g(a)$  en  $g(b)$ .
- Controleer voor elk extremum van  $g$  of dit correspondeert met een extremum van  $f$ , bijv. door
  - te gebruiken dat iedere continue functie een minimum en maximum moet aannemen op een compact gebied,
  - punten in een omgeving van het extremum in  $f$  in te vullen, of
  - naar het teken van de afgeleides  $D_1 f$  en  $D_2 f$  te kijken.