

Integralen en sommen

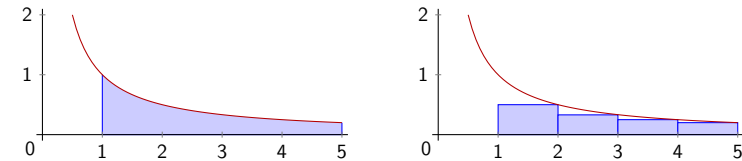
Analyse: van \mathbb{R} naar \mathbb{R}^n hoorcollege Convergentie van reeksen, vervolg (2)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatika
Universiteit van Amsterdam



Stel dat we een reeks $\sum a_n$ hebben waarbij $a_n = f(n)$ voor een zekere dalende positieve functie f .



We zien dat

$$\int_1^n f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n a_k, \quad \sum_{k=2}^n a_k \leq \int_1^n f(t) dt.$$

Dus: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ dan en slechts dan als $\int_1^{\infty} f(t) dt < \infty$.

Integralen en sommen

Integraalkenmerk

Zij $\sum a_n$ een reeks zodat $a_n = f(n)$ voor een dalende positieve functie f . Dan geldt dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan en slechts dan als $\int_1^{\infty} f(t) dt < \infty$.

Hiermee kunnen we inzien dat $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^{\infty} = 1.$$

Meer algemeen bekijken we $\sum \frac{1}{n^p}$ voor $p \neq 1$:

$$\int_1^{\infty} t^{-p} dt = \left[\frac{1}{1-p} t^{1-p} \right]_1^{\infty} = \begin{cases} 1/(p-1) & \text{als } p > 1 \\ \infty & \text{als } p < 1. \end{cases}$$

En voor $p = 1$ krijgen we $\int_1^{\infty} t^{-1} dt = [\log t]_1^{\infty} = \infty$. Bewezen:

Stelling 15.1

De reeks $\sum \frac{1}{n^p}$ convergeert desda $p > 1$.

Alternerende reeksen

Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \dots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum (-1)^{n+1} a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k$ voor de partiële sommen.

- De deelrij (s_{2n}) is stijgend en (s_{2n+1}) is dalend.
- Er geldt $s_{2n} \leq s_1$ en $s_{2n+1} \geq s_2$ voor alle n .
- Dus de begrensde monotone rijen (s_{2n}) en (s_{2n+1}) hebben eindige limieten, zeg $s_{2n} \rightarrow s$ en $s_{2n+1} \rightarrow t$. Dan volgt

$$t - s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0.$$

- Er volgt $t = s$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$.

