Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

Machtreeksen (3)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

Polynomen en machtreeksen

De polynomen vormen een klasse functies van de vorm

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$$

Polynomen en machtreeksen

De polynomen vormen een klasse functies van de vorm

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{N-1} x^{N-1} + a_N x^N.$$

Polynomen en machtreeksen

De polynomen vormen een klasse functies van de vorm

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{N-1} x^{N-1} + a_N x^N.$$

We kunnen dit uitbreiden naar zogenaamde machtreeksen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Polynomen en machtreeksen

De polynomen vormen een klasse functies van de vorm

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{N-1} x^{N-1} + a_N x^N.$$

We kunnen dit uitbreiden naar zogenaamde machtreeksen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots .$$

Polynomen en machtreeksen

De polynomen vormen een klasse functies van de vorm

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{N-1} x^{N-1} + a_N x^N.$$

We kunnen dit uitbreiden naar zogenaamde machtreeksen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots .$$

Als een dergelijke machtreeks convergeert

Polynomen en machtreeksen

De polynomen vormen een klasse functies van de vorm

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{N-1} x^{N-1} + a_N x^N.$$

We kunnen dit uitbreiden naar zogenaamde machtreeksen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots .$$

Als een dergelijke machtreeks convergeert, definieert f een functie op (een deelverzameling) van $\mathbb{R}$.

Convergentie van machtreeksen

Bekijk een machtreeks $\sum a_n x^n$.

Convergentie van machtreeksen

Bekijk een machtreeks $\sum a_n x^n$. Voor welke x convergeert deze?

Convergentie van machtreeksen

Bekijk een machtreeks $\sum a_n x^n$. Voor welke x convergeert deze?

We passen het wortelkenmerk toe

Convergentie van machtreeksen

Bekijk een machtreeks $\sum a_n x^n$. Voor welke x convergeert deze?

We passen het wortelkenmerk toe en kijken naar

$$\alpha = \limsup_{n \to \infty} |a_n x^n|^{1/n}$$

Convergentie van machtreeksen

Bekijk een machtreeks $\sum a_n x^n$. Voor welke x convergeert deze?

We passen het wortelkenmerk toe en kijken naar

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Convergentie van machtreeksen

Bekijk een machtreeks $\sum a_n x^n$. Voor welke x convergeert deze?

We passen het wortelkenmerk toe en kijken naar

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

De reeks convergeert als $\alpha < 1$

Convergentie van machtreeksen

Bekijk een machtreeks $\sum a_n x^n$. Voor welke x convergeert deze?

We passen het wortelkenmerk toe en kijken naar

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

De reeks convergeert als $\alpha < 1$, dus als

$$|x| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}$$

Convergentie van machtreeksen

Bekijk een machtreeks $\sum a_n x^n$. Voor welke x convergeert deze?

We passen het wortelkenmerk toe en kijken naar

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

De reeks convergeert als $\alpha < 1$, dus als

$$|x| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} =: R.$$

Convergentie van machtreeksen

Bekijk een machtreeks $\sum a_n x^n$. Voor welke x convergeert deze?

We passen het wortelkenmerk toe en kijken naar

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

De reeks convergeert als $\alpha < 1$, dus als

$$|x| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} =: R.$$

We noemen dit getal R de convergentiestraal van de machtreeks.

Convergentie van machtreeksen

Bekijk een machtreeks $\sum a_n x^n$. Voor welke x convergeert deze?

We passen het wortelkenmerk toe en kijken naar

$$\alpha = \limsup_{n \to \infty} |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n}.$$

De reeks convergeert als $\alpha < 1$, dus als

$$|x| < \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n}} =: R.$$

We noemen dit getal R de convergentiestraal van de machtreeks. Voor $|x| > R$ convergeert de reeks zeker niet

Convergentie van machtreeksen

Bekijk een machtreeks $\sum a_n x^n$. Voor welke x convergeert deze?

We passen het wortelkenmerk toe en kijken naar

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

De reeks convergeert als $\alpha < 1$, dus als

$$|x| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} =: R.$$

We noemen dit getal R de convergentiestraal van de machtreeks. Voor $|x| > R$ convergeert de reeks zeker niet, voor $x = \pm R$ weten we het niet.

Convergentie van machtreeksen

Bekijk een machtreeks $\sum a_n x^n$. Voor welke x convergeert deze?

We passen het wortelkenmerk toe en kijken naar

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

De reeks convergeert als $\alpha < 1$, dus als

$$|x| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} =: R.$$

We noemen dit getal R de convergentiestraal van de machtreeks. Voor $|x| > R$ convergeert de reeks zeker niet, voor $x = \pm R$ weten we het niet. We hebben bewezen:

Stelling 23.1

Zij $\sum a_n x^n$ een machtreeks en definieer R als boven. Dan convergeert de reeks voor $|x| < R$ en divergeert hij voor $|x| > R$.

Convergentiestraal

Stelling 23.1

Zij $\sum a_n x^n$ een machtreeks en definieer $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$. Dan convergeert de reeks voor $|x| < R$ en divergeert voor $|x| > R$.

Convergentiestraal

Stelling 23.1

Zij $\sum a_n x^n$ een machtreeks en definieer $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$. Dan convergeert de reeks voor $|x| < R$ en divergeert voor $|x| > R$.

Voorbeeld: $\sum x^n$.

Convergentiestraal

Stelling 23.1

Zij $\sum a_n x^n$ een machtreeks en definieer $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$. Dan convergeert de reeks voor $|x| < R$ en divergeert voor $|x| > R$.

Voorbeeld: $\sum x^n$. Er geldt $R = \frac{1}{\limsup 1^{1/n}}$

Convergentiestraal

Stelling 23.1

Zij $\sum a_n x^n$ een machtreeks en definieer $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$. Dan convergeert de reeks voor $|x| < R$ en divergeert voor $|x| > R$.

Voorbeeld: $\sum x^n$. Er geldt $R = \frac{1}{\limsup 1^{1/n}} = 1$.

Convergentiestraal

Stelling 23.1

Zij $\sum a_n x^n$ een machtreeks en definieer $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$. Dan convergeert de reeks voor $|x| < R$ en divergeert voor $|x| > R$.

Voorbeeld: $\sum x^n$. Er geldt $R = \frac{1}{\limsup 1^{1/n}} = 1$. De reeks convergeert dus zeker op $(-1, 1)$.

Convergentiestraal

Stelling 23.1

Zij $\sum a_n x^n$ een machtreeks en definieer $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$. Dan convergeert de reeks voor $|x| < R$ en divergeert voor $|x| > R$.

Voorbeeld: $\sum x^n$. Er geldt $R = \frac{1}{\limsup 1^{1/n}} = 1$. De reeks convergeert dus zeker op $(-1, 1)$. Merk op dat de reeks in $x = \pm 1$ niet convergeert

Convergentiestraal

Stelling 23.1

Zij $\sum a_n x^n$ een machtreeks en definieer $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$. Dan convergeert de reeks voor $|x| < R$ en divergeert voor $|x| > R$.

Voorbeeld: $\sum x^n$. Er geldt $R = \frac{1}{\limsup 1^{1/n}} = 1$. De reeks convergeert dus zeker op $(-1, 1)$. Merk op dat de reeks in $x = \pm 1$ niet convergeert: het interval van convergentie is $(-1, 1)$.

Convergentiestraal

Stelling 23.1

Zij $\sum a_n x^n$ een machtreeks en definieer $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$. Dan convergeert de reeks voor $|x| < R$ en divergeert voor $|x| > R$.

Voorbeeld: $\sum x^n$. Er geldt $R = \frac{1}{\limsup 1^{1/n}} = 1$. De reeks convergeert dus zeker op $(-1, 1)$. Merk op dat de reeks in $x = \pm 1$ niet convergeert: het interval van convergentie is $(-1, 1)$.

Herinner: als $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ bestaat

Convergentiestraal

Stelling 23.1

Zij $\sum a_n x^n$ een machtreeks en definieer $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$. Dan convergeert de reeks voor $|x| < R$ en divergeert voor $|x| > R$.

Voorbeeld: $\sum x^n$. Er geldt $R = \frac{1}{\limsup 1^{1/n}} = 1$. De reeks convergeert dus zeker op $(-1, 1)$. Merk op dat de reeks in $x = \pm 1$ niet convergeert: het interval van convergentie is $(-1, 1)$.

Herinner: als $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ bestaat, dan is deze limiet gelijk aan $\limsup |a_n|^{1/n}$.

Convergentiestraal

Stelling 23.1

Zij $\sum a_n x^n$ een machtreeks en definieer $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$. Dan convergeert de reeks voor $|x| < R$ en divergeert voor $|x| > R$.

Voorbeeld: $\sum x^n$. Er geldt $R = \frac{1}{\limsup 1^{1/n}} = 1$. De reeks convergeert dus zeker op $(-1, 1)$. Merk op dat de reeks in $x = \pm 1$ niet convergeert: het interval van convergentie is $(-1, 1)$.

Herinner: als $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ bestaat, dan is deze limiet gelijk aan $\limsup |a_n|^{1/n}$. Dit is soms makkelijker, bijvoorbeeld bij $\sum \frac{1}{n!} x^n$.

Convergentiestraal

Stelling 23.1

Zij $\sum a_n x^n$ een machtreeks en definieer $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$. Dan convergeert de reeks voor $|x| < R$ en divergeert voor $|x| > R$.

Voorbeeld: $\sum x^n$. Er geldt $R = \frac{1}{\limsup 1^{1/n}} = 1$. De reeks convergeert dus zeker op $(-1, 1)$. Merk op dat de reeks in $x = \pm 1$ niet convergeert: het interval van convergentie is $(-1, 1)$.

Herinner: als $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ bestaat, dan is deze limiet gelijk aan $\limsup |a_n|^{1/n}$. Dit is soms makkelijker, bijvoorbeeld bij $\sum \frac{1}{n!} x^n$. Hier is

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Convergentiestraal

Stelling 23.1

Zij $\sum a_n x^n$ een machtreeks en definieer $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$. Dan convergeert de reeks voor $|x| < R$ en divergeert voor $|x| > R$.

Voorbeeld: $\sum x^n$. Er geldt $R = \frac{1}{\limsup 1^{1/n}} = 1$. De reeks convergeert dus zeker op $(-1, 1)$. Merk op dat de reeks in $x = \pm 1$ niet convergeert: het interval van convergentie is $(-1, 1)$.

Herinner: als $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ bestaat, dan is deze limiet gelijk aan $\limsup |a_n|^{1/n}$. Dit is soms makkelijker, bijvoorbeeld bij $\sum \frac{1}{n!} x^n$. Hier is

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!}$$

Convergentiestraal

Stelling 23.1

Zij $\sum a_n x^n$ een machtreeks en definieer $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$. Dan convergeert de reeks voor $|x| < R$ en divergeert voor $|x| > R$.

Voorbeeld: $\sum x^n$. Er geldt $R = \frac{1}{\limsup 1^{1/n}} = 1$. De reeks convergeert dus zeker op $(-1, 1)$. Merk op dat de reeks in $x = \pm 1$ niet convergeert: het interval van convergentie is $(-1, 1)$.

Herinner: als $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ bestaat, dan is deze limiet gelijk aan $\limsup |a_n|^{1/n}$. Dit is soms makkelijker, bijvoorbeeld bij $\sum \frac{1}{n!} x^n$. Hier is

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

Convergentiestraal

Stelling 23.1

Zij $\sum a_n x^n$ een machtreeks en definieer $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$. Dan convergeert de reeks voor $|x| < R$ en divergeert voor $|x| > R$.

Voorbeeld: $\sum x^n$. Er geldt $R = \frac{1}{\limsup 1^{1/n}} = 1$. De reeks convergeert dus zeker op $(-1, 1)$. Merk op dat de reeks in $x = \pm 1$ niet convergeert: het interval van convergentie is $(-1, 1)$.

Herinner: als $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ bestaat, dan is deze limiet gelijk aan $\limsup |a_n|^{1/n}$. Dit is soms makkelijker, bijvoorbeeld bij $\sum \frac{1}{n!} x^n$. Hier is

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0,$$

Convergentiestraal

Stelling 23.1

Zij $\sum a_n x^n$ een machtreeks en definieer $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$. Dan convergeert de reeks voor $|x| < R$ en divergeert voor $|x| > R$.

Voorbeeld: $\sum x^n$. Er geldt $R = \frac{1}{\limsup 1^{1/n}} = 1$. De reeks convergeert dus zeker op $(-1, 1)$. Merk op dat de reeks in $x = \pm 1$ niet convergeert: het interval van convergentie is $(-1, 1)$.

Herinner: als $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ bestaat, dan is deze limiet gelijk aan $\limsup |a_n|^{1/n}$. Dit is soms makkelijker, bijvoorbeeld bij $\sum \frac{1}{n!} x^n$. Hier is

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0,$$

dus $R = \infty$.

Convergentiestraal

Stelling 23.1

Zij $\sum a_n x^n$ een machtreeks en definieer $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$. Dan convergeert de reeks voor $|x| < R$ en divergeert voor $|x| > R$.

Voorbeeld: $\sum x^n$. Er geldt $R = \frac{1}{\limsup 1^{1/n}} = 1$. De reeks convergeert dus zeker op $(-1, 1)$. Merk op dat de reeks in $x = \pm 1$ niet convergeert: het interval van convergentie is $(-1, 1)$.

Herinner: als $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ bestaat, dan is deze limiet gelijk aan $\limsup |a_n|^{1/n}$. Dit is soms makkelijker, bijvoorbeeld bij $\sum \frac{1}{n!} x^n$. Hier is

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0,$$

dus $R = \infty$. De reeks convergeert dus op heel $\mathbb{R}$.

Machtreeksen en convergentie van functies

Een machtreeks definieert een functie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ op het interval van convergentie I.

Machtreeksen en convergentie van functies

Een machtreeks definieert een functie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ op het interval van convergentie I. Deze functie is de limiet van de functies

$$s_n(x)$$

Machtreeksen en convergentie van functies

Een machtreeks definieert een functie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ op het interval van convergentie I. Deze functie is de limiet van de functies

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \ :$$

Machtreeksen en convergentie van functies

Een machtreeks definieert een functie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ op het interval van convergentie I. Deze functie is de limiet van de functies

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \; :$$

voor elke $x \in I$ geldt $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$.

Machtreeksen en convergentie van functies

Een machtreeks definieert een functie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ op het interval van convergentie I. Deze functie is de limiet van de functies

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k :$$

voor elke $x \in I$ geldt $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$. De s_n zijn polynomen

Machtreeksen en convergentie van functies

Een machtreeks definieert een functie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ op het interval van convergentie I. Deze functie is de limiet van de functies

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k :$$

voor elke $x \in I$ geldt $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$. De s_n zijn polynomen, dus continu en differentieerbaar.

Machtreeksen en convergentie van functies

Een machtreeks definieert een functie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ op het interval van convergentie I. Deze functie is de limiet van de functies

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k :$$

voor elke $x \in I$ geldt $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$. De s_n zijn polynomen, dus continu en differentieerbaar. Betekent dit dat f dat ook is?

Machtreeksen en convergentie van functies

Een machtreeks definieert een functie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ op het interval van convergentie I. Deze functie is de limiet van de functies

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \ :$$

voor elke $x \in I$ geldt $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$. De s_n zijn polynomen, dus continu en differentieerbaar. Betekent dit dat f dat ook is?

Meer algemeen: stel dat we een rij continue functies f_n hebben

Machtreeksen en convergentie van functies

Een machtreeks definieert een functie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ op het interval van convergentie I. Deze functie is de limiet van de functies

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \, :$$

voor elke $x \in I$ geldt $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$. De s_n zijn polynomen, dus continu en differentieerbaar. Betekent dit dat f dat ook is?

Meer algemeen: stel dat we een rij continue functies f_n hebben met $f_n(x) \to f(x)$ voor elke x in een zeker interval.

Machtreeksen en convergentie van functies

Een machtreeks definieert een functie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ op het interval van convergentie I. Deze functie is de limiet van de functies

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k :$$

voor elke $x \in I$ geldt $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$. De s_n zijn polynomen, dus continu en differentieerbaar. Betekent dit dat f dat ook is?

Meer algemeen: stel dat we een rij continue functies f_n hebben met $f_n(x) \to f(x)$ voor elke x in een zeker interval. Is f dan continu op dat interval?