Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ hoorcollege

Uniforme convergentie (4)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

Puntsgewijze convergentie

Bekijk de rij van functies $f_n(x) = x^n$ op $[0,1]$. Dan wordt de puntsgewijze limiet van f_n gegeven door

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 1, \\ 1 & \text{als } x = 1. \end{cases}$$

We zien dat f niet continu is op $[0,1]$.

Definitie 24.1

Zij (f_n) een rij reëelwaardige functies op $S \subseteq \mathbb{R}$. We zeggen dat (f_n) puntsgewijs convergeert naar f als voor alle $x \in S$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

In symbolen betekent dit

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall x \in S \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N.$$

Belangrijk is dat N hier van x afhangt.

Uniforme convergentie

Definitie 24.1

Zij (f_n) een rij reëelwaardige functies op $S \subseteq \mathbb{R}$. We zeggen dat (f_n) puntsgewijs convergeert naar f als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall x \in S \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N.$$

We kunnen dit sterker maken door de N in de definitie onafhankelijk van x te laten zijn:

Definitie 24.2

Zij (f_n) een rij reëelwaardige functies op $S \subseteq \mathbb{R}$. We zeggen dat (f_n) uniform convergeert naar f als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n > N.$$

Uniforme convergentie

Definitie 24.2

Zij (f_n) een rij reëelwaardige functies op $S \subseteq \mathbb{R}$. We zeggen dat (f_n) uniform convergeert naar f als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n > N.$$

We bekijken nogmaals $f_n(x) = x^n$ op $[0,1]$. Gezien is dat $f_n \to f$ puntsgewijs, waar $f(x) = 0$ voor $x < 1$ en $f(1) = 1$. Als deze convergentie ook uniform is, moet voor $\epsilon > 0$ er een N zijn zodat

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in [0,1] \quad \text{als} \quad n > N$$

en dus

$$|x^N| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in [0,1).$$

Neem nu $x = 2^{-1/N} \in (0,1)$. Dan is $|x^N| = 2^{-1}$. We zien dus dat we geen uniforme convergentie $f_n \to f$ hebben.

Voorbeeld van uniforme convergentie

Definitie 24.2

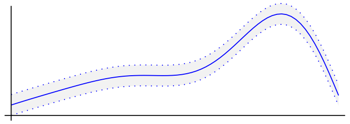
Zij (f_n) een rij reëelwaardige functies op $S \subseteq \mathbb{R}$. We zeggen dat (f_n) uniform convergeert naar f als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat}$$
$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n > N.$$

Bekijk $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$ voor $x \in \mathbb{R}$. Claim $f_n \to 0$ uniform op $\mathbb{R}$. Er geldt

$$|f_n(x) - 0| = \left|\tfrac{1}{n}\sin(nx)\right| \leq \tfrac{1}{n}.$$

Dus we zien dat voor $N = \frac{1}{\epsilon}$ geldt $|f_n(x)| < \epsilon$ als $n > N$.



Uniforme convergentie en continuïteit

Stelling 24.3

Stel dat $f_n \to f$ uniform op een verzameling S. Als elke f_n continu is in $x_0 \in S$, dan is f dat ook.

Bewijs: zij $\epsilon > 0$. We bekijken

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)|.$$

Vanwege uniforme convergentie is er N zodat geldt

$$|f(x) - f_N(x)| < \tfrac{\epsilon}{3} \quad \text{voor alle} \quad x \in S.$$

Vanwege continuïteit van f_N is er $\delta > 0$ zodat

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \tfrac{\epsilon}{3} \quad \text{als} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Conclusie: voor $|x - x_0| < \delta$ geldt $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$.

Suprema en uniforme convergentie

Definitie 24.2

Zij (f_n) een rij reëelwaardige functies op $S \subseteq \mathbb{R}$. We zeggen dat (f_n) uniform convergeert naar f als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat}$$
$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n > N.$$

We kunnen dit herformuleren als volgt:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \sup_{x \in S} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N$$

oftewel

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in S} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Eén manier om uniforme convergentie aan te tonen is dus om het maximum van $|f_n(x) - f(x)|$ te bepalen en te laten zien dat dit naar 0 gaat als $n \to \infty$.

Uniforme convergentie en integraal

Definitie 24.2

Zij (f_n) een rij reëelwaardige functies op $S \subseteq \mathbb{R}$. We zeggen dat (f_n) uniform convergeert naar f als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n > N.$$

Stelling 25.2

Zij (f_n) een rij continue functies en stel dat $f_n \to f$ uniform op $[a, b]$. Dan geldt

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bewijs: zij $\epsilon > 0$. Er bestaat N zodat voor $n > N$ geldt $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}$ voor alle $x \in [a, b]$. We bekijken

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x.$$
$$\leq \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\,\mathrm{d}x = \epsilon.$$

Uniform Cauchy

Definitie 24.2

Zij (f_n) een rij reëelwaardige functies op $S \subseteq \mathbb{R}$. We zeggen dat (f_n) uniform convergeert naar f als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat}$$
$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n > N.$$

Definitie 25.3

We zeggen dat een rij reëelwaardige functies (f_n) op $S \subseteq \mathbb{R}$ uniform Cauchy is als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n, m > N.$$

Eenvoudig in te zien: als (f_n) uniform convergent, dan ook uniform Cauchy.

Volledigheid

Stelling 25.4

Zij (f_n) een rij functies die uniform Cauchy is op $S \subseteq \mathbb{R}$. Dan convergeert f_n uniform naar een zekere functie f op S.

- We hebben

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat}$$
$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n, m > N. \qquad (*)$$

  dus in het bijzonder hebben we voor elke (vaste) x dat

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \quad \text{als} \quad n, m > N.$$

- Voor elke x is de rij $\big(f_n(x)\big)$ dus een Cauchyrij van getallen. Deze convergeert; definieer $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
- Zij $\epsilon > 0$ en neem N als in $(*)$. Er geldt nu voor $m > N$ dat

$$|f(x) - f_m(x)| = \left|\lim_{n\to\infty} f_n(x) - f_m(x)\right| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

  Dit geldt voor alle $x \in S$, dus hiermee is uniforme convergentie bewezen.