

## Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

### Calculus met machtreeksen (6)

Gerrit Oomens  
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde  
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica  
Universiteit van Amsterdam



## Uniforme convergentie van machtreeksen

### Stelling 25.7 (Weierstrass $M$ -test)

Zij  $(M_k)$  een rij positieve getallen en  $(g_k)$  een rij functies op  $S \subseteq \mathbb{R}$  zodat  $|g_k(x)| \leq M_k$  voor alle  $x \in S$ . Als  $\sum M_k < \infty$ , dan convergeert  $\sum g_k$  uniform op  $S$ .

We kunnen dit nu toepassen om de convergentie van een machtreeks  $\sum a_k x^k$  te onderzoeken. Stel dat deze reeks convergentiestraal  $R$  heeft. Als  $x \in [-R_1, R_1]$  met  $0 < R_1 < R$ , dan is

$$|a_k x^k| \leq |a_k| R_1^k R_1^k$$

en  $\sum |a_k| R_1^k$  convergeert. Dus convergeert  $\sum a_k x^k$  uniform op  $[-R_1, R_1]$ .

Conclusie:  $f(x) = \sum a_k x^k$  is een continue functie op  $[-R_1, R_1]$  voor alle  $R_1 < R$ . De functie is dus continu op  $(-R, R)$ .

### Merk op

De convergentiestraal  $(\limsup |a_n|^{1/n})^{-1}$  van  $\sum a_k x^k$  is gelijk aan die van  $\sum |a_k| x^k$ .

## Continuïteit en integreren

### Stelling 26.1

Zij  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  een machtreeks met convergentiestraal  $R$ . Als  $R_1 < R$ , dan convergeert de reeks uniform op  $[-R_1, R_1]$ .

We zien nu

- De functie  $f$  is continu op  $[-R_1, R_1]$  voor elke  $R_1 < R$ .
- Dus ook op  $(-R, R)$ .

We kunnen nu ook machtreeksen integreren: voor  $|x| < R$  geldt

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \int_0^x \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n t^n dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^x \sum_{n=0}^N a_n t^n dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \int_0^x a_n t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}. \end{aligned}$$

## Differentiëren van machtreeksen

### Stelling 26.5

Zij  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  een machtreeks met convergentiestraal  $R > 0$ . Dan is  $f$  differentieerbaar op  $(-R, R)$  met  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ .

Bewijs: merk op dat de reeks

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

ook convergentiestraal  $R$  heeft:  $\overline{\lim} |n a_n|^{1/n} = \lim n^{1/n} \overline{\lim} |a_n|^{1/n} = \overline{\lim} |a_n|^{1/n}$ . Volgens de vorige stelling geldt voor  $|x| < R$  dat

$$\int_0^x g(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n a_n t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x) - a_0.$$

Dus is  $f(x) = \int_0^x g(t) dt + a_0$  differentieerbaar volgens de Hoofdstelling van de Calculus en geldt  $f'(x) = g(x)$ .

## Voorbeeld: rekenen met machtreeksen

Bekijk  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$  voor  $x \in (-1, 1)$ . Differentiëren geeft

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

en integreren geeft

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\log(1-x).$$

We zien dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\log(1-x).$$

Als we in de laatste gelijkheid  $x$  door  $-x$  vervangen, zien we dat

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

voor  $x \in (-1, 1)$ . Deze gelijkheid blijkt ook te gelden voor  $x = 1$ : we hebben

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

## Stelling van Abel

### Stelling van Abel (26.6)

Stel dat  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  een machtreeks is met convergentiestraal  $R$ . Als de reeks convergeert in  $x = R$ , dan is  $f$  continu op  $(-R, R]$ . Zelfde voor  $x = -R$ .

We passen dit toe op de reeks

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

In  $x = 1$  is dit een alternerende reeks, dus convergent. Vanwege de stelling is  $f$  dus continu op  $(-1, 1]$ . We zagen dat voor  $x \in (-1, 1)$  geldt  $f(x) = \log(1+x)$ . Dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{x \uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \lim_{x \uparrow 1} \log(1+x) = \log 2.$$

Dus we zien inderdaad dat  $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ .

## Partieel sommeren

### Lemma

Zij  $(a_n)$  en  $(b_n)$  rijen. Definieer  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \dots + a_n$ . Dan geldt

$$\sum_{k=m}^n a_k b_k = s_n b_n - s_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}).$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n a_k b_k &= \sum_{k=m}^n (s_k - s_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^n s_k b_k - \sum_{k=m}^n s_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=m}^n s_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} s_k b_{k+1} \\ &= s_n b_n + \sum_{k=m}^{n-1} s_k b_k - s_{m-1} b_m - \sum_{k=m-1}^{n-1} s_k b_{k+1}. \end{aligned}$$

## Stelling van Abel

### Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in  $x = 1$  met  $f(1) = 0$ , dan is  $f$  continu op  $(-1, 1]$ .

Definieer  $f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  en  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k = f_n(1)$ . Bekijk voor  $n > m$

$$f_n(x) - f_m(x) = \sum_{k=m+1}^n a_k x^k = s_n x^n - s_m x^{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k (x^k - x^{k+1}).$$

Er geldt  $s_k \rightarrow 0$ , dus er is  $N$  zodat  $|s_k| < \frac{\epsilon}{3}$  voor  $k > N$ . Dan geldt voor  $x \in [0, 1)$

$$\left| (1-x) \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k x^k \right| \leq \frac{\epsilon}{3} (1-x) \sum_{k=m+1}^{n-1} x^k = \frac{\epsilon}{3} (1-x) \frac{x^{m+1} - x^n}{1-x} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Dus geldt voor  $x \in [0, 1]$  dat

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |s_n| + |s_m| + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon.$$

We zien dat  $(f_n)$  uniform Cauchy is op  $[0, 1]$ , dus uniform convergent. Voor elke  $n$  is  $f_n$  continu op  $[0, 1]$ , dus de limietfunctie  $f$  ook.

## Stelling van Abel

### Stelling van Abel (26.6)

Stel dat  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  een machtreeks is met convergentiestraal  $R$ . Als de reeks convergeert in  $x = R$ , dan is  $f$  continu op  $(-R, R]$ . Zelfde voor  $x = -R$ .

### Stelling van Abel, basisgeval (bewezen)

Stel dat  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in  $x = 1$  met  $g(1) = 0$ , dan is  $g$  continu op  $(-1, 1]$ .

Bewijs van het algemene geval: stel dat de machtreeks convergentiestraal  $R$  heeft en in  $x = R$  convergeert. Bekijk dan

$$g(x) = f(Rx) - f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n x^n - f(R).$$

Dit is een machtreeks met convergentiestraal 1 die in  $x = 1$  convergeert. Verder geldt  $g(1) = 0$ , dus is  $g$  continu op  $(-1, 1]$ . Dan is  $f(x) = g(x/R) + f(R)$  continu op  $(-R, R]$ .

## Stelling van Abel

### Stelling van Abel (26.6)

Stel dat  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  een machtreeks is met convergentiestraal  $R$ . Als de reeks convergeert in  $x = R$ , dan is  $f$  continu op  $(-R, R]$ . Zelfde voor  $x = -R$ .

### Stelling van Abel, basisgeval (bewezen)

Stel dat  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in  $x = 1$  met  $g(1) = 0$ , dan is  $g$  continu op  $(-1, 1]$ .

Bewijs van het algemene geval: stel dat de machtreeks convergentiestraal  $R$  heeft en in  $x = -R$  convergeert. Bekijk dan

$$g(x) = f(-Rx) - f(-R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n x^n - f(-R).$$

Dit is een machtreeks met convergentiestraal 1 die in  $x = 1$  convergeert. Verder geldt  $g(1) = 0$ , dus is  $g$  continu op  $(-1, 1]$ . Dan is  $f(x) = g(-x/R) + f(-R)$  continu op  $[-R, R)$ .