OPGAVEN BIJ ANALYSE 2015, O-SYMBOLEN, TAYLORREEKSEN EN LIMIETEN (9)

Definities en stellingen

Definitie (Grote O-symbool van Landau)**.** Zij $f, g\colon S \to \mathbb{R}$ functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ en $a \in S$. We schrijven

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{voor} \quad x \to a$$

als er een $C > 0$ bestaat zodat $|f(x)| \leq C|g(x)|$ op een omgeving van a. Meer precies: er bestaat $\delta > 0$ zodat de ongelijkheid geldt op $(a-\delta, a+\delta)$.

Definitie (Kleine o-symbool van Landau)**.** Zij $f, g\colon S \to \mathbb{R}$ functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ en $a \in S$. We schrijven

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{voor} \quad x \to a$$

als geldt $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Stelling (Stelling van Taylor)**.** *Zij f een n-keer continu differentieerbare functie op (a,b) en neem $c \in (a,b)$. Dan*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + O(|x-c|^n) \qquad \textit{voor } x \to c.$$

Opgaven

Opgave 1. Zij f, g functies op $\mathbb{R}$. Bewijs dat als $f(x) = o(|g(x)|)$ voor $x \to a$, dan ook $f(x) = O(|g(x)|)$ voor $x \to a$.

Opgave 2. Zij f, g, h positieve functies op $\mathbb{R}$. Stel dat $f(x) = O(g(x))$ en $g(x) = O(h(x))$ voor $x \to a$. Bewijs dat $f(x) = O(h(x))$ voor $x \to a$.

Opgave 3. Bewijs dat $O + O = O$: als $f(x) = O(|h(x)|)$ en $g(x) = O(|h(x)|)$, dan geldt $f(x) + g(x) = O(|h(x)|)$.

Opgave 4. Zij $\alpha, \epsilon > 0$. Bewijs dat als $f(x) = O(|x|^\alpha)$ voor $x \to 0$, dan ook $f(x) = o(|x|^{\alpha-\epsilon})$ voor $x \to 0$.

Opgave 5. Bepaal de volgende limieten

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} + 2\cos x - 3}{\sin^2 x^2}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{2x^2} - \sin 2x}{\sin x - x}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{24\cos x - 24 - x^4}{x^4}$