FNWI
Universiteit van Amsterdam
Science Park 904 Amsterdam

Deeltentamen 1 **Analyse 1**, 8 maart 2013, 11.00-13.00 uur.

Motiveer uw antwoorden!

In ieder vraagstuk zitten 10 punten; 1 voor het vraagstuk en 9 extra te verdienen.

1. (9 pt) (Theorievraag) Bewijs de volgende stelling. *Zij (f_n) een rij reëelwaardige continue functies op een verzameling $S \subset \mathbb{R}$. Veronderstel dat de rij uniform naar de functie f convergeert. Bewijs dat f continu is.*

2. Zij $a_n = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$.
   a (3 pt) Onderzoek of de rij (a_n) monotoon naar 0 daalt.
   b (6 pt) Onderzoek of de reeks
$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n$$
   convergeert. Gebruik bijvoorbeeld de technieken uit het bewijs van Leibniz' "alternating series theorem".

3. Zij $f_n(t) = te^{-n(t-1/n)^2}$ op $[0, \infty)$. Beschouw de reeks
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t).$$
   a (2 pt) Bewijs dat deze reeks puntsgewijs convergeert op het interval $[0, \infty)$.
   b (4 pt) Bewijs dat het f_n zijn maximum aanneemt in $\frac{1+\sqrt{1+2n}}{2n}$. Zij nu $\delta > 0$. Bewijs dat de reeks uniform convergeert op het interval $[\delta, \infty)$.
   c (3 pt) Onderzoek of de reeks uniform convergeert op $[0, \infty)$.

4. a (6 pt) Bewijs dat
$$e^{\sin(x^2)} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + R_5(x),$$
   waarbij voor zekere $M > 0$ geldt $|R_5(x)| \le M|x|^5$, als $|x| < 1$. U mag hierbij de formule en stelling van Taylor voor sinus en exponentiële functie bekend veronderstellen.
   b (3 pt) Bereken
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x^2)} - 1 - x^2}{x^4}.$$
   U mag het resultaat uit a) gebruiken, maar dit hoeft niet.

Succes!