FNWI
Universiteit van Amsterdam
Science Park 904 Amsterdam

Deeltentamen 2 **Analyse 1**, 12 april 2012, 11.00-13.00 uur.

*Motiveer uw antwoorden!*

1. (9 pt) Theorievraag: bewijs precies één van de volgende twee stellingen. Voor een correct bewijs van de eerste stelling kunnen 3 extra punten worden behaald.

**Stelling.** *Zij $E \subseteq \mathbb{R}^n$ open en $f : E \to \mathbb{R}$. Dan is $f$ continu differentieerbaar op $E$ dan en slechts dan als alle partiële afgeleiden $D_j f$ bestaan op $E$ en op $E$ continu zijn.*

**Stelling.** *Zij $(S, d)$ en $(S^*, d^*)$ metrische ruimtes en $f : S \to S^*$ continu. Als $E \subseteq S$ een compacte verzameling is, dan is $f$ uniform continu op $E$.*

2. Beschouw de ruimte $B$ bestaande uit begrensde rijen van de vorm $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ met de eigenschap dat er een $N_{\mathbf{x}} > 0$ bestaat met $x_n = 0$ voor $n > N_{\mathbf{x}}$. We geven $B$ de structuur van een reële vectorruimte door voor $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ te definiëren

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots),$$

$$\lambda \mathbf{x} := (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots).$$

a. (4 pt) Bewijs dat

$$\|\mathbf{x}\| := \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$$

een norm op $B$ definieert.

b. (5 pt) Laat zien dat $B$ met deze norm *geen* volledige metrische ruimte is.

c. (4 pt) Zij $V$ een vectorruimte met inproduct. Bewijs de parallellogramidentiteit geldt voor de van het inproduct afkomstige norm $\|\cdot\|_{\text{in}}$ :

$$\|u + v\|_{\text{in}}^2 + \|u - v\|_{\text{in}}^2 = 2(\|u\|_{\text{in}}^2 + \|v\|_{\text{in}}^2), \quad u, v \in V.$$

d. (5 pt) Laat zien dat de norm $\|\cdot\|$ op $B$ *niet* van een inproduct afkomstig kan zijn.

3. Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeven door

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{\log(1+x^2y^2)}{x^2+(x^2+y^2)^2} & \text{als } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{als } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a. (4 pt) Bewijs dat $f$ continu is in $(0, 0)$.

b. (3 pt) Bepaal de partiële afgeleiden $D_1 f$ en $D_2 f$ in $(0, 0)$.

c. (5 pt) Onderzoek voor welke richtingen $r = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ de richtingsafgeleide $D_r f(0, 0)$ bestaat en bereken deze dan.

d. (5 pt) Onderzoek of $f$ totaal differentieerbaar is in $(0, 0)$.

*Succes!*