FNWI
Universiteit van Amsterdam
Science Park 904 Amsterdam

Deeltentamen 2 **Analyse van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$**, 24 mei 2013, 11.00-13.00 uur.

Motiveer uw antwoorden!

1. (10 pt.)(Theorievraag) Bewijs de volgende propositie.

Propositie. *Zij $(a,b) \in E \subset \mathbb{R}^2$ met E open en zij $f : E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie. Dan geldt $D_{12}f(a,b) = D_{21}f(a,b)$.*

2. (8 pt) Bereken de lengte van de kromme in $\mathbb{R}^3$ gegeven door

$$\gamma(t) = (4\cos t, \cos^2 t - \sin^2 t, 2\cos t \sin t + 2t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

3. Zij F een C^2 functie op het eerste kwadrant $\{(u,v) : \ u > 0, v > 0\}$. We beschouwen de coördinaten-transformatie

$$u = x^2 y, \quad v = xy^2$$

tussen het eerste kwadrant in het (x,y) vlak en in het (u,v) vlak, en definiëren f door $f(x,y) = F(x^2y, y^2x)$.

a. (4 pt.)Laat zien dat

$$xD_1 f = 2uD_1F + vD_2F \quad \text{en} \quad yD_2 f = uD_1F + 2vD_2F, \quad ((u,v) = (x^2y, y^2x)).$$

Of in de andere notatie

$$x\frac{\partial}{\partial x} = 2u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v} \quad \text{en} \quad y\frac{\partial}{\partial y} = u\frac{\partial}{\partial u} + 2v\frac{\partial}{\partial v}.$$

b. (6 pt.) Laat zien dat

$$xyD_{12}f = \left[2u^2D_{11} + 2v^2D_{22} + 3uvD_{12} + 2uD_1 + 2vD_2\right] F \quad ((u,v) = (x^2y, y^2x)).$$

Of in de andere notatie

$$xy\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = 2u^2\frac{\partial^2}{\partial u \partial u} + 2v^2\frac{\partial^2}{\partial v \partial v} + 3uv\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + 2u\frac{\partial}{\partial u} + 2v\frac{\partial}{\partial v}.$$

4. De functie f op $\mathbb{R}^2$ is gegeven door $f(x,y) = x^2 y e^{-x^2-y^2}$.

a. (3 pt.) Bepaal de stationaire punten van f op $\mathbb{R}$.

b. (3 pt.) Laat (x,y) in $\mathbb{R}^2$ met $x^2 + y^2 = C > 3/2$. Bewijs dat de functie $g(t) = f(tx, ty)$ monotoon is op $t > 1$.

c. (5 pt.) Laat zien dat f op de verzameling $\{(x,y) : \ x^2 + y^2 \le C\}$ met $C > 3/2$ geen randextremen heeft.

d. (5 pt.) Bepaal de aard van de stationaire punten van f.

Succes!