

# Tentamen

## Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$

### Bachelor wiskunde jaar 1

Deeltoets

Datum: woensdag 24 juni 2015

Tijd: 14.00-17.00

Aantal pagina's: 2 (inclusief voorblad)

Aantal vragen: 7

Maximum aantal te behalen punten: 60

Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

---

#### VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen:** kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

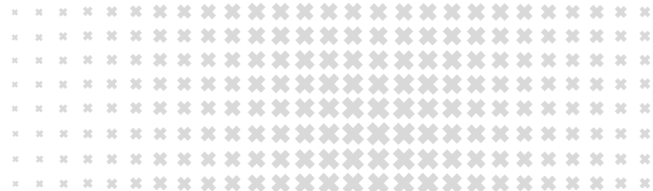
---

#### HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinerator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

---

**Succes!**



Leg altijd je antwoorden uit. Bij vragen die beginnen met “bepaal” of “geef” is een formeel bewijs niet noodzakelijk, tenzij anders vermeld.

**Opgave 1.** Bewijs de volgende stelling: zij  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  een  $C^2$  functie en  $\vec{a} \in E^\circ$  met  $f'(\vec{a}) = 0$ . Stel dat voor alle  $\vec{h} \neq \vec{0}$  geldt  $\vec{h}^\top H_f(\vec{a})\vec{h} > 0$ . Dan neemt  $f$  een sterk lokaal minimum aan in  $\vec{a}$ . Als je hierbij stellingen of andere resultaten gebruikt, formuleer deze dan duidelijk. [10 pt]

**Opgave 2.** Bekijk de functie  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  met  $f(0, 0) = 0$  en

$$f(x, y) = \frac{x \sin^3 y}{x^2 + y^4}, \quad \text{voor } (x, y) \neq (0, 0).$$

- (a) Bewijs dat  $f$  continu is in  $(0, 0)$ . [4 pt]
- (b) Bepaal de richtingsafgeleiden van  $f$  in  $(0, 0)$ . [2 pt]
- (c) Is  $f$  differentieerbaar in  $(0, 0)$ ? Bewijs je antwoord. [4 pt]

**Opgave 3.**

- (a) Zij  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  een  $C^1$ -functie. Bepaal de afgeleide van  $g(x) = f(x, x)$  in termen van de partiële afgeleiden van  $f$ . [5 pt]
- (b) Zij  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  een  $C^1$ -functie. Definieer

$$g(x) = \int_0^x h(x, t) dt.$$

Bepaal  $g'(x)$  in termen van  $h$  en zijn afgeleiden. [5 pt]

**Opgave 4.** Bekijk de functie  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeven door

$$f(x, y) = x^2(x^2 - y^2)^2$$

op het gebied  $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ .

- (a) Bepaal de inwendige extrema van  $f$ . Geef van ieder extremum aan of het (i) een minimum of maximum is, (ii) sterk of zwak en (iii) absoluut of relatief. [4 pt]
- (b) Herhaal dit voor de randextrema. Schets het gebied  $E$  en de gevonden extrema. [6 pt]

**Opgave 5.** Bekijk de functie  $f(x, y) = \cos(x^2)(e^y - 1) - y$ . Bepaal een polynoom  $P$  van graad 2 zodat  $f(x, y) = P(x, y) + O(\|(x, y)\|^3)$ . [5 pt]

**Opgave 6.** Bereken de lengte van de kromme  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeven door  $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ . [5 pt]

*Herinner:* er geldt  $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$ ,  $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ .

**Opgave 7.** Zij  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  een functie die homogeen is van graad  $\alpha > 0$ . Stel dat  $f$  continu is in  $\vec{0}$ .

- (a) Bewijs dat  $f$  begrensd is op  $S^{n-1} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}\| = 1\}$ . [5 pt]
- (b) Volgt dat  $f$  continu is op heel  $\mathbb{R}^n$ ? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld. [5 pt]