UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Tentamen

Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$

Bachelor wiskunde jaar 1

Deeltoets
Datum: woensdag 24 juni 2015
Tijd: 14.00-17.00

Aantal pagina's: 2 (inclusief voorblad)
Aantal vragen: 7
Maximum aantal te behalen punten: 60
Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen**: kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

Succes!

Leg altijd je antwoorden uit. Bij vragen die beginnen met "bepaal" of "geef" is een formeel bewijs niet noodzakelijk, tenzij anders vermeld.

Opgave 1. Bewijs de volgende stelling: zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2 functie en $\vec{a} \in E^\circ$ met $f'(\vec{a}) = 0$. Stel dat voor alle $\vec{h} \neq \vec{0}$ geldt $\vec{h}^\top H_f(\vec{a})\vec{h} > 0$. Dan neemt f een sterk lokaal minimum aan in $\vec{a}$. Als je hierbij stellingen of andere resultaten gebruikt, formuleer deze dan duidelijk. [10 pt]

Opgave 2. Bekijk de functie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met $f(0,0) = 0$ en

$$f(x,y) = \frac{x \sin^3 y}{x^2 + y^4}, \qquad \text{voor } (x,y) \neq (0,0).$$

(a) Bewijs dat f continu is in $(0,0)$. [4 pt]
(b) Bepaal de richtingsafgeleiden van f in $(0,0)$. [2 pt]
(c) Is f differentieerbaar in $(0,0)$? Bewijs je antwoord. [4 pt]

Opgave 3.

(a) Zij $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^1-functie. Bepaal de afgeleide van $g(x) = f(x,x)$ in termen van de partiële afgeleiden van f. [5 pt]
(b) Zij $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^1-functie. Definieer

$$g(x) = \int_0^x h(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Bepaal $g'(x)$ in termen van h en zijn afgeleiden. [5 pt]

Opgave 4. Bekijk de functie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x,y) = x^2(x^2 - y^2)^2$$

op het gebied $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1,\, x \geq 0,\, y \geq 0\}$.

(a) Bepaal de inwendige extrema van f. Geef van ieder extremum aan of het (i) een minimum of maximum is, (ii) sterk of zwak en (iii) absoluut of relatief. [4 pt]
(b) Herhaal dit voor de randextrema. Schets het gebied E en de gevonden extrema. [6 pt]

Opgave 5. Bekijk de functie $f(x,y) = \cos(x^2)(e^y - 1) - y$. Bepaal een polynoom P van graad 2 zodat $f(x,y) = P(x,y) + O(\|(x,y)\|^3)$. [5 pt]

Opgave 6. Bereken de lengte van de kromme $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ gegeven door $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$. [5 pt]
Herinner: er geldt $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$, $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$.

Opgave 7. Zij $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een functie die homogeen is van graad $\alpha > 0$. Stel dat f continu is in $\vec{0}$.

(a) Bewijs dat f begrensd is op $S^{n-1} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}\| = 1\}$. [5 pt]
(b) Volgt dat f continu is op heel $\mathbb{R}^n$? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld. [5 pt]