Universiteit van Amsterdam

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Tentamen

Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$

Bachelor wiskunde jaar 1

Deeltoets
Datum: donderdag 14 april 2016
Tijd: 14.00-17.00

Aantal pagina's: 2 (inclusief voorblad)
Aantal vragen: 6
Maximum aantal te behalen punten: 60
Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen**: kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

Succes!

Leg altijd je antwoorden uit. Bij vragen die beginnen met "bepaal" of "geef" is een formeel bewijs niet noodzakelijk, tenzij anders vermeld.

Opgave 1. Formuleer en bewijs de Stelling van Taylor. [10 pt]

Opgave 2. Geef (nauwkeurig) de definities van puntsgewijze en uniforme convergentie van een reeks van functies $\sum g_k(x)$. Leg in woorden uit wat het verschil is tussen deze begrippen en illustreer dit aan de hand van een voorbeeld van een reeks die wel puntsgewijs, maar niet uniform convergeert op bijv. $[0,1]$. [10 pt]

Opgave 3. Convergeren de volgende reeksen? Bewijs je antwoord.

(a) $\sum \frac{1+n}{n^2 \log n}$ [3 pt]

(b) $\sum \frac{2^n + (-2)^n}{\big(4+(-1)^n\big)^n}$ [3 pt]

Bepaal het convergentieinterval van de volgende machtreeks:

(c) $\sum 2^{-n} \frac{n!}{1+n!} x^{3n}$ [4 pt]

Opgave 4.

(a) Bewijs dat

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O\big(x^4\big). \quad [4 \text{ pt}]$$

(b) Bepaal de waarde van de volgende limiet en bewijs dat je resultaat correct is:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\big(\log(1+x^2) - x^2\big) + x^4}{x^6}. \quad [6 \text{ pt}]$$

Opgave 5. Bekijk voor $\alpha > 0$ de rij functies $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f_n(x) = ne^{-nx^2} x^\alpha.$$

(a) Bewijs dat de rij puntsgewijs convergeert op $[0,\infty)$ voor alle $\alpha > 0$. Geef de limiet. [2 pt]

(b) Bewijs dat de rij uniform convergeert op $[\delta,\infty)$ voor elke $\delta > 0$ en alle $\alpha > 0$. [5 pt]

(c) Voor welke α is er uniforme convergentie op heel $[0,\infty)$? Bewijs je antwoord. [3 pt]

Opgave 6. Zij (S,d) een metrische ruimte en $E \subseteq S$. *Herinner*: de rand ∂E is gedefinieerd als $\partial E := E^- \setminus E^\circ$.

(a) Bewijs dat ∂E gesloten is. [3 pt]

(b) Bewijs dat $x \in \partial E$ dan en slechts dan als voor elke $r > 0$ de bol $B(x,r)$ zowel punten uit E als uit $S \setminus E$ bevat. [7 pt]