UITWERKINGEN TOETS 1 ANALYSE: VAN $\mathbb{R}$ NAAR $\mathbb{R}^n$

Opgave 1. Zie slides.

Opgave 2. Merk op dat $d_\infty(\vec{x},\vec{y}) \leq d_2(\vec{x},\vec{y}) \leq \sqrt{2}\, d_\infty(\vec{x},\vec{y})$. Als nu $d_2(\vec{x}^n,\vec{x}) \to 0$, dan geldt ook $d_\infty(\vec{x}^n,\vec{x}) \to 0$ en vice versa.

Opgave 3.

(a) Ja. Dit is eigenlijk gewoon $\sum \frac{(-1)^n}{2n}$. Pas nu de stelling over alternerende reeksen toe.

(b) Nee: $\frac{1}{\log(n!)+n} \geq \frac{1}{\log(n^n)+n} = \frac{1}{n(\log n+1)} \geq \frac{1}{2\log n}$ en de reeks $\sum \frac{1}{n\log n}$ convergeert niet, want

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x = \int_{\log 2}^\infty \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = [\log u]_{\log 2}^\infty = \infty$$

met de substitutie $u = \log x$.

(c) Dit is $\sum a_n x^n$ met $a_n = \frac{3^{n/2}}{(n/2)^2}$. Er geldt

$$\limsup |a_n|^{1/n} = \limsup \frac{3^{1/2}}{(n/2)^(2/n)} = \sqrt{3},$$

dus de convergentiestraal is $1/\sqrt{3}$.

Opgave 4.

(a) Voor $t = 0$ is convergentie duidelijk. Voor $t > 0$ is $\limsup\big(\sqrt{t}\,e^{-nt}\big)^{1/n} = e^{-t} < 1$, dus de root test geeft het resultaat.

(b) Merk op dat $f_n(t) = \sqrt{t}\,e^{-nt}$ maximaal is in $t = \frac{1}{2n}$. Dit maximum ligt links van δ voor n voldoende groot, dus op $[\delta,\infty)$ geldt dan $f_n(t) \leq f_n(\delta)$. In (a) hebben we gezien dat $\sum f_n(\delta)$ convergeert. De Weierstrass M-test geeft nu het resultaat.

(c) Nee. Er geldt voor $t > 0$ dat

$$f(t) := \sum_{n=1}^\infty \sqrt{t}\,e^{-nt} = \sqrt{t}\sum_{n=1}^\infty \big(e^{-t}\big)^n = \frac{\sqrt{t}e^{-t}}{1-e^{-t}},$$

terwijl $f(0) = 0$. Nu is

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{\sqrt{t}e^{-t}}{1-e^{-t}} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{\sqrt{t}}{1-e^{-t}} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1/2\sqrt{t}}{1+e^{-t}} = \infty.$$

Dus is f niet continu op $[0,\infty)$, maar dat zou wel het geval zijn als de reeks uniform convergeert.

Opgave 5.

(1) Het inwendige bestaat uit alle punten $x \in E$ zodat er $r > 0$ bestaat zodat $B(x,r) \subseteq E$.

(2) Als $x \in E^\circ$, dan is er $r > 0$ zodat $B(x,r) \subseteq E$. Merk op dat $B(x,r)$ open is, dus voor $y \in B(x,r)$ is er $s > 0$ zodat $B(y,s) \subseteq B(x,r) \subseteq E$. Dus $y \in E^\circ$. We zien dat $B(x,r) \subseteq E^\circ$, dus x is een inwendig punt van E°.

(3) Als $U \subseteq E$ open, dan is er voor elke $x \in U$ een $r > 0$ zodat $B(x,r) \subseteq U \subseteq E$. Dus $x \in E^\circ$.

Opgave 6.

(a) Dit volgt direct uit de stelling van Taylor toegepast op $\sin x$.

(b)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{6(\sin x - x)^2 - \frac{1}{6}x^6}{x^8} &= \lim_{x\to 0}\frac{6\left(-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+O(x^7)\right)^2 - \frac{1}{6}x^6}{x^8}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{6\left(\frac{x^6}{36}-\frac{x^8}{6\cdot 60}+O(x^{10})\right) - \frac{1}{6}x^6}{x^8}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^8}{60}+O(x^{10})}{x^8} = -\frac{1}{60} + \lim_{x\to 0}\frac{O(x^{10})}{x^8} = -\frac{1}{60}
\end{aligned}
$$

want

$$
\left|\frac{O(x^{10})}{x^8}\right| \le C\frac{x^{10}}{x^8} = Cx^2 \to 0.
$$