Uitwerkingen Toets 1 Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$

Opgave 1. Zie slides.

Opgave 2. Zij $g_n : E \to \mathbb{R}$ een rij functies. In beide gevallen gaat het om convergentie van de rij $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_n(x)$. Zie verder definities op de slides. Het grote verschil is dat de N in de definitie van convergentie wel of niet van x mag afhangen. Bij uniform is de convergentie in zekere snel overal "even snel", bij puntsgewijs kan de snelheid van convergentie variren. Een voorbeeld van een reeks die wel puntsgewijs, maar niet uniform convergeert is $\sum_{k=0}^{\infty}(1-x)x^n$ op $[0,1]$. De limietfunctie is immers niet continu in 1.

Opgave 3.

(a) Merk op dat $\sum \frac{1}{n^2 \log n}$ convergeert. Het volstaat dus om naar het gedrag van $\sum \frac{n}{n^2 \log n} = \sum \frac{1}{n \log n}$ te kijken. Hiervoor passen we de integraaltest toe: $\int \frac{1}{x \log x}\,\mathrm{d}x = \log\log x \to \infty$ als $x \to \infty$, dus de som convergeert niet.

(b) Merk op dat voor oneven n er 0 staat, voor even n krijgen we $2 \cdot 2^n/5^n$. Root test toepassen geeft een $\limsup$ van $2/5 < 1$, dus hij convergeert.

(c) We nemen $y = x^3$ en bekijken eerst

$$2^{-n-1}\frac{(n+1)!}{1+(n+1)!} \Big/ \left(2^{-n}\frac{n!}{1+n!}\right) = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{1+n!}{1+(n+1)!} \to \frac{1}{2}.$$

Dus de convergentiestraal van $\sum 2^{-n}\frac{n!}{1+n!}x^n$ is 2. Er is geen convergentie in $x = \pm 2$. Voor de oorspronkelijke reeks geeft dit een interval $(-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$.

Opgave 4.

(a) Zij $f(x) = \log(1+x)$. Er geldt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

Taylor geeft

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + O(x^4).$$

Invullen geeft het gewenste resultaat.

(b) Er geldt

$$\frac{2\big(\log(1+x^2) - x^2\big) + x^4}{x^6} = \frac{2\big(-\frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + O(x^8)\big) + x^4}{x^6} \to \frac{2}{3}.$$

Opgave 5.

(a) We hebben $f_n(x) = n\left(e^{-x^2}\right)^n x^\alpha$. Merk op $e^{-x^2} < 1$ als $x \neq 0$ en $nr^n \to 0$ als $|r| < 1$. Als $x = 0$ dan staat er al 0.

(b) Bekijk

$$f_n'(x) = \big(-2xnx^\alpha + \alpha x^{\alpha-1}\big)ne^{-nx^2} = nx^{\alpha-1}e^{-nx^2}\big(\alpha - 2nx^2\big).$$

Gelijkstellen aan 0 geeft een maximum $x = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{2n}}$. Merk op dat $x \to 0$ als $n \to \infty$, dus dit maximum ligt niet in $[\delta, \infty)$ voor n voldoende groot. Dan geldt dus $|f_n(x)| \le |f_n(\delta)| \to 0$, dus hebben we uniforme convergentie.

(c) De functiewaarde in het maximum is

$$f_n\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2n}}\right) = ne^{-\alpha/2}\left(\frac{\alpha}{2n}\right)^{\alpha/2} = Cn^{1-\alpha/2}.$$

Dit gaat naar 0 als $\alpha > 2$.

Opgave 6.

(a) Er geldt $\partial E = E^- \setminus E^\circ = E^- \cap (S \setminus E^\circ)$. De doorsnede van gesloten verzamelingen is weer gesloten.

(b) Stel $x \in \partial E$ en laat $r > 0$. Als $B(x,r) \cap S \setminus E$ leeg zou zijn, dan ligt $B(x,r)$ geheel in E en dus $x \in E^\circ$. Dat kan niet per definitie van ∂E. Verder ligt $x \in E^-$, dus er is een rijtje (x_n) in E dat naar x convergeert. Maar dat betekent dat iedere $B(x,r)$ wel een $x_n \in E$ bevat.

Andersom, stel dat $B(x,r)$ punten uit zowel E als $S \setminus E$ bevat. Dan kunnen we $x_n \in B(x, 1/n)$ kiezen om een rijtje (x_n) in E te krijgen met $x_n \to x$. Dus $x \in E^-$. Verder kan niet gelden $x \in E^\circ$, want anders zou er een bol $B(x,r)$ zijn die geheel in E ligt.