Uitwerkingen Toets 2 Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$

Opgave 1. Zie slides.

Opgave 2.

(a) We gebruiken $a^2 + b^2 \geq 2ab$:

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x \sin^3 y|}{2|x|y^2} \leq \frac{|y|}{2} \to 0.$$

(b) We hebben

$$\frac{f(hx,hy)}{h} = \frac{hx\sin^3(hy)}{h^3x^3 + h^5y^4} = \frac{hxy^3}{x^3 + h^2y^4} + O(h) \to 0.$$

(c) Nee. Als f differentieerbaar is, dan geldt $|f(x,y)|/\|(x,y)\| \to 0$. Voor $x = y^2$ geldt echter

$$\left|\frac{f(y^2,y)}{\sqrt{y^4+y^2}}\right| = \frac{y^2|\sin^3 y|}{2y^4\sqrt{y^4+y^2}} \geq \frac{y^2|\sin^3 y|}{2y^4\sqrt{2y^2}} \to \frac{1}{2^{3/2}} \qquad \text{als } y \to 0.$$

Opgave 3.

(a) De functie g is de samenstelling van f met $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeven door $r(x) = (x,x)$. Dus

$$g'(x) = f'(r(x))r'(x) = \begin{bmatrix} D_1f(x,x) & D_2f(x,x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = D_1f(x,x) + D_2f(x,x).$$

(b) Dit is een speciaal geval van bovenstaande: $g(x) = f(x,x)$ voor

$$f(x,y) = \int_0^y h(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Er geldt $D_1f(x,y) = \int_0^y D_1h(x,t)\,\mathrm{d}t$ en $D_2f(x,y) = h(x,y)$. Dus geldt

$$g'(x) = \int_0^x D_1h(x,t)\,\mathrm{d}t + h(x,x).$$

Opgave 4.

(a) We hebben

$$D_1f(x,y) = 2x(x^2-y^2)^2 + 2x^2(x^2-y^2)\cdot 2x = 2x(x^2-y^2)\big(x^2-y^2+2x^2\big)$$
$$D_2f(x,y) = x^2(x^2-y^2)\cdot -2y = -2yx^2(x^2-y^2).$$

We zien dat beide afgeleides nul zijn alleen als $x = 0$ of als $x^2 = y^2$. De punten $(0,y)$ zijn niet inwendig. In de punten (x,x) geldt $f \equiv 0$ en daarbuiten $f > 0$, dus dit zijn allemaal zwakke relatieve minima.

(b) We hebben drie stukken rand: op $(0,y)$ is de functie 0, dus zijn allemaal zwakke relatieve minima. Op $(x,0)$ hebben we $f(x,0) = x^6$, dus dat is maximaal in $x = 1$. De functie komt op dit gebied nooit boven 1, dus dit is een globaal sterk maximum. Ten slotte hebben we de rand $y^2 = 1 - x^2$, waar we kijken naar

$$g(x) = f(x, \sqrt{1-x^2}) = x^2(1-2x^2)^2$$

met $g'(x) = 2x(1-2x^2)^2 + 2x^2(1-2x^2)\cdot -4x = 2x(1-2x^2)(1-2x^2-4^2x)$. Gelijkstellen aan 0 geeft $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ of $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$, dus de punten $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ en $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}})$. Het eerste punt ligt weer op de lijn $x = y$ en is een globaal sterk minimum. Het tweede punt is een maximum op de rand. Dit punt is het absolute maximum van f op de verzameling $E \cap \{(x,y) : x \leq y\}$, dus is een relatief maximum van f op E.

Opgave 5. Merk op $\cos(x^2) = 1+O(x^4)$ en $e^y - 1 = y + \frac{y^2}{2} + O(y^3)$. Het gevraagde polynoom is dus $P(x,y) = \frac{y^2}{2}$.

Opgave 6. Er geldt

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\left(\cos^2 \tfrac{t}{2} - \sin^2 \tfrac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 \tfrac{t}{2}} = \int_0^{2\pi} 2\sin \tfrac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 8.$$

Opgave 7.

(a) Vanwege de continuïteit in $\vec{0}$ bestaat er $\delta > 0$ zodat $|f(x) - f(0)| < 1$ als $\|x\| < \delta$. Dus f is begrensd op $B(\vec{0}, \delta)$. Voor $x \in S^{n-1}$ geldt

$$f(x) = f\left(\frac{2}{\delta}\frac{\delta}{2}x\right) = \left(\frac{2}{\delta}\right)^\alpha f\left(\frac{\delta}{2}x\right).$$

Nu ligt $\frac{\delta}{2}x$ in $B(\vec{0}, \delta)$, dus de rechterkant is begrensd.

(b) Nee: je kunt hem op elke lijn los van elkaar kiezen. Kies bijvoorbeeld $f(0,x) = x$ en verder identiek nul.