Uitwerkingen Toets 2 Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$

Opgave 1. Zie slides.

Opgave 2. Zie slides.

Opgave 3.

(a) Merk op $\cos y - 1 = O(y^2)$ volgens de stelling van Taylor. Er geldt $x^2+y^4 \geq x^2$ en dus
$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^4} \leq \frac{x^2y^2}{x^2} = y^2 \to 0$$
als $(x,y) \to (0,0)$.

(b) Merk op dat $\cos y - 1 = \frac{y^2}{2} + O(y^4)$. We zien
$$\frac{f(hx,hy)}{h} = \frac{h^4x^2y^2/2 + O(h^6x^2y^4)}{h^2x^2+h^4y^4} = \frac{h^2x^2y^2/2 + O(h^4x^2y^4)}{x^2+y^4} \to 0$$
als $h \to 0$.

(c) Ja:
$$\frac{x^2y^2}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2|y|}{x^2} = y \to 0.$$

Opgave 4.

(a) Merk op dat de functie binnen de integraal C^1 is, dus mogen we afgeleide en integraal verwisselen. Pas dit herhaaldelijk toe.

(b) Merk op dat $e^{-xy^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-xy^2)^k}{k!}$. Met de Weierstrass M-test zien we dat deze reeks uniform convergeert voor $y \in [0,1]$. Dus mogen we limiet (reeks) en integraal omwisselen:
$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 e^{-xy^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-xy^2)^k}{k!}\,\mathrm{d}y \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^k x^k y^{2k}}{k!}\,\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} x^k. \end{aligned}$$

Opgave 5. Definieer $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ en pas de kettingregel toe op $\phi \circ f$.

Opgave 6.

(a) We hebben
$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^4 \\ D_2 f(x,y) &= 4(x-1)\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^3. \end{aligned}$$
We zien dat beide afgeleides nul zijn alleen als $y = \frac{1}{2}$. De functiewaarde in deze punten is ook 0, terwijl voor $x < 1$ de functie negatief en voor $x > 1$ positief. De punten $(x, \frac{1}{2}$ met $x \in (0,1)$ zijn dus relatieve zwakke maxima.

(b) We hebben drie stukken rand:

  (a) De lijn tussen $(0,0)$ en $(0,1)$: hier is de functie gelijk aan $-(y-\frac{1}{2})^4$ met een minimum in $y=0$ en $y=1$ en maximum in $y = \frac{1}{2}$. Dit maximum hoort bij de lijn die we eerder hebben gevonden en is ook een relatief zwak maximum.

  (b) De lijn tussen $(0,0)$ en $(2,0)$: hier is de functie gelijk aan $\frac{1}{16}(x-1)$ met een minimum in $x=0$ en een maximum in $x=2$.

  (c) De lijn $y = 1 - x/2$ tussen $(2,0)$ en $(0,1)$. Hier is de functie gelijk aan

$$g(x) = f(x, 1-x/2) = (x-1)\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x\right)^4 = \tfrac{1}{16}(x-1)(1-x)^4 = \tfrac{1}{16}(x-1)^5$$

en dit is minimaal in $x = 0$ en maximaal in $x = 2$. Het punt $(1, \frac{1}{2})$ is een zadelpunt.

We hebben $f(0,0) = -\frac{1}{16} = f(0,1)$ en $f(2,0) = \frac{1}{16}$. Dit zijn dus absolute minima (de eerste twee) resp. maxima.