Uitwerking Analyse deeltentamen 1

Opgave 1. Zie boek.

Opgave 2.

a. Nee: $a_4 = 1/6$, $a_6 < a_4$ en $a_9 = 1/6$.

b. We passen partieel sommeren toe: zij $s_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i$. We hebben

$$\sum_{n=2}^{N}(-1)^n a_n = \sum_{n=2}^{N-1} s_n(a_n - a_{n+1}) + s_N b_N.$$

Merk op $s_n = 0$ als n even en -1 anders. Nu is voor n oneven

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n-\sqrt{n}} - \frac{1}{n+1+\sqrt{n+1}} = \frac{1-\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n-\sqrt{n})(n+1+\sqrt{n+1})}$$

en dit is (in absolute waarde) begrensd door $C/n^{3/2}$, dus dit geeft een absoluut convergente reeks.

Opgave 3.

a. Root test.

b. Merk op dat f_n maximaal is in $t_n^* = \frac{1+\sqrt{1+2n}}{2n}$. Voor grote n ligt dit maximum buiten $[\delta, \infty)$ en volgt $f_n(t) \le f_n(\delta)$. Pas nu de Weierstrass M-test toe.

c. Neem $t = 1/N$ en bekijk

$$\begin{aligned}\sum_{n=N+1}^{2N} te^{-n(t-1/n)^2} &= \frac{1}{2N}\sum_{n=N+1}^{2N} e^{-n(1/N-1/n)^2} \\ &\ge \frac{1}{2N}\sum_{n=N+1}^{2N} e^{-2N\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{2N}\right)^2} = \frac{1}{2}e^{-1/(2N)} \to \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Opgave 4.

a. We hebben $\sin x^2 = x^2 + R_3(x^2)$ en $e^x = 1 + x + x^2/2 + R_3(x)$. Dit geeft

$$\begin{aligned}e^{\sin x^2} &= 1 + x^2 + \big(x^2 + R_3(x^2)\big)^2/2 + R_3\big(x^2 + R_3(x^2)\big) \\ &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + R_3(x^2)/2 + R_3\big(x^2 + R_3(x^2)\big).\end{aligned}$$

Merk nu op dat

$$\big|R_3(x^2)\big| \le C|x^2|^3 = C|x|^6, \qquad \big|R_3\big(x^2 + R_3(x^2)\big)\big| \le \big|x^2 + R_2(x^2)\big|^3 \le C'|x^6|,$$

want $|R_2(x^2)| \le C''|x|^4$.

b. Er geldt

$$\frac{e^{\sin x^2} - 1 - x^2}{x^4} = \frac{x^4/2 + R_6(x)}{x^4} \to \frac{1}{2}$$

want $|R_6(x)|/|x|^4 \le M|x|^2 \to 0$.