Uitwerking Analyse deeltentamen 2

Opgave 1. Zie syllabus.

Opgave 2.

a. Merk op dat $\|x\| > 0$ desda $x_j \neq 0$ voor minstens één j, dus $x \neq 0$. Verder is duidelijk $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$ en volgt de driehoeksongelijkheid direct uit die voor de absolute waarde.

b. Bekijk
$$\mathbf{x}^n = (1/2, 1/4, 1/8, \ldots, 1/2^n, 0, 0, \ldots).$$
Er geldt duidelijk $\mathbf{x}^n \in B$. Verder hebben we voor $n > m$ dat
$$\|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^m\| = \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{2^j}$$
en dit wordt willekeurig klein als m, n groot aangezien $\sum_j \frac{1}{2^j}$ convergeert. Dus $(\mathbf{x}^n)_n$ is een Cauchyrij. Als $\mathbf{x}^n$ zou convergeren naar $\mathbf{x} \in B$, dan zou duidelijk moeten gelden $x_j = 1/2^j$. Echter deze rij voldoet niet aan de voorwaarde dat er maar eindig veel niet-nul entries zijn. De rij $\mathbf{x}^n$ heeft dus geen limiet in B.

c. We hebben
$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle + \langle u,u\rangle - 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.\end{aligned}$$

d. Neem $u = (1, 0, 0, \ldots)$ en $v = (0, 1, 0, \ldots)$. Dan staat er aan de linkerkant 8 en aan de rechterkant 4 in de parallellogramidentiteit. Deze identiteit geldt dus niet, dus de norm kan niet afkomstig zijn van een inproduct.

Opgave 3.

a. Merk op $\log(1+z) = z + R_2(z)$. Er volgt
$$\frac{\log(1+x^2y^2)}{x^2+(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y^2}{x^2+(x^2+y^2)^2} + \frac{R_2(x^2y^2)}{x^2+(x^2+y^2)^2}.$$
Voor de eerste term hebben we
$$\frac{x^2y^2}{x^2+(x^2+y^2)^2} \leq \frac{x^2y^2}{x^2} = y^2 \to 0$$
als $(x, y) \to 0$. De tweede term is alleen maar kleiner aangezien $|R_2(x^2y^2)| \leq Cx^4y^4$.

b. Deze zijn beide 0.

c. We bekijken
$$f(h\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\log(1+h^4x^2y^2)}{h^2x^2+h^4(x^2+y^2)^2} = \frac{h^4x^2y^2}{h^2x^2+h^4(x^2+y^2)^2} + \frac{R_2(h^4x^2y^2)}{h^2x^2+h^4(x^2+y^2)^2}.$$
We kijken nu naar $f(h\vec{\mathbf{r}})/h$. De tweede term gaat wederom naar 0 als $h \to 0$, de eerste wordt
$$\frac{hx^2y^2}{x^2+h^2(x^2+y^2)^2}.$$
Dit gaat naar 0 voor alle $\vec{\mathbf{r}}$.

d. Als f differentieerbaar is, dan moet de afgeleide 0 zijn volgende bovenstaande. Dan moet dus gelden $f(\vec{})/\|\vec{\mathbf{x}}\| \to 0$ als $\vec{\mathbf{x}} \to 0$. Dat gaat goed:
$$\frac{1}{\|\vec{\mathbf{x}}\|}\frac{x^2y^2}{x^2+(x^2+y^2)^2} \leq \frac{1}{\|\vec{\mathbf{x}}\|}\frac{x^2y^2}{x^2} = \frac{y^2}{\|\vec{\mathbf{x}}\|} \leq \frac{\|\vec{\mathbf{x}}\|^2}{\|\vec{\mathbf{x}}\|} = \|\vec{\mathbf{x}}\| \to 0.$$