10 Opgaven: tellen

Opgave 10.1. Beschouw 2 appels en 5 sinaasappels.

a. Stel dat we elk stuk fruit een verschillend nummer geven. Hoeveel manieren zijn er om ze te ordenen?

b. Stel dat we alleen de sinaasappels nummeren. Hoeveel manieren zijn er nu?

c. Hoeveel manieren zijn er als we niet nummeren?

Stel nu dat we de appels en sinaasappels in een fruitschaal leggen en hier willekeurig twee objecten uit pakken.

d. Als al het fruit genummerd is (dus ze zijn allemaal van elkaar te onderscheiden), hoeveel mogelijkheden zijn er voor de twee objecten? Zijn alle mogelijkheden even waarschijnlijk?

e. Hoeveel mogelijkheden zijn er als het fruit niet genummerd is? Zijn alle mogelijkheden even waarschijnlijk?

f. Stel nu dat we de kans willen berekenen op twee sinaasappels. Welke van de twee bovenstaande vragen kunnen we gebruiken? Bereken de gevraagde kans door het aantal mogelijkheden met twee sinaasappels te tellen.

Opgave 10.2. We kiezen willekeurig zeven mensen uit een populatie. Iedere individu heeft met kans $\frac{3}{4}$ een neus.

a. Wat is de kans dat alle zeven een neus hebben?

b. Wat is de kans dat ze geen van allen een neus hebben?

c. Wat is de kans dat minstens 1 van hen een neus heeft?

d. Wat is de kans dat de eerste twee wel een neus hebben, maar de anderen niet?

e. Wat is de kans dat precies twee van hen een neus hebben?

f. Wat is de kans dat minder dan twee een neus hebben?

Opgave 10.3. Bekijk een paneel met 5 LED lampjes erop. Elk lampje kan aan of uit zijn.

a. Hoeveel toestanden zijn er in totaal?

b. In hoeveel toestanden zijn er twee lampjes aan?

c. In hoeveel toestanden zijn er k lampjes aan?

d. Bereken $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$. Verklaar het verband met vraag a.

e. Stel nu dat er n lampjes op het paneel zijn. Beantwoord vragen a-d opnieuw (verander de formule in vraag d).

Opgave 10.4. We pakken willekeurig drie badeendjes uit een bad met drie groene, drie witte en twee paarse badeendjes. We nummeren de badeendjes zodat ze van elkaar te onderscheiden zijn.

a. Wat is het totaal aantal manieren om drie badeendjes te pakken?

b. Bepaal het aantal manieren met drie groene badeendjes. Wat is dus de kans op een drie groene badeendjes?

c. Bepaal het aantal manieren met precies twee groene badeendjes. *Hint*: welke mogelijke ordeningen zijn er? Tel per ordening het aantal mogelijkheden.

d. Bepaal de kans dat we precies 1 groen badeendje pakken.

Opgave 10.5. Nederlandse postcodes bestaan uit 4 getallen tussen de 0 en de 9 en twee letters.

a. Hoeveel mogelijke postcodes zijn er als alle getallen en letters mogelijk zijn?

b. De lettercombinaties 'SA', 'SD' en 'SS' worden niet gebruikt. Ook beginnen postcodes nooit met een 0. Hoeveel mogelijkheden zijn er?

c. Voor 2005 worden de letters F, I, O, Q, U en Y niet gebruikt. Met hoeveel procent is het aantal beschikbare postcodes toegenomen door deze letters toe te staan?

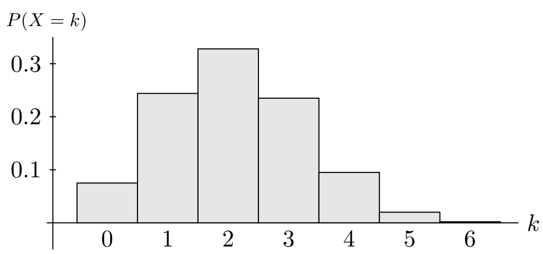
Opgave 10.6. Bij een meerkeuzetoets met vier antwoordmogelijkheden is bij gokken de kans op een correct antwoord gelijk aan $\frac{1}{4}$.

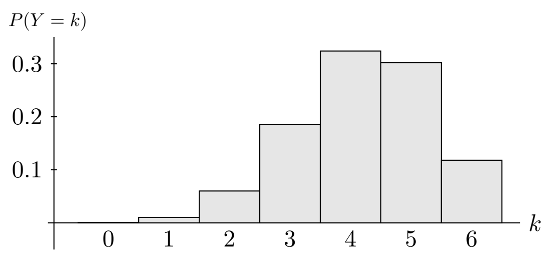
a. Het aantal correcte gokken in 20 vragen heeft een binomiale verdeling. Wat zijn n en p?

b. Als we dit experiment (20 keer gokken) heel vaak uitvoeren, wat is dan (gemiddeld) het verwachte aantal correcte gokken?

c. Geef een uitdrukking voor de kans op precies 5 correcte gokken.

Opgave 10.7. De onderstaande grafieken geven de kansverdeling van twee verschillende binomiaal verdeelde toevalsvariabelen X en Y, beide met het aantal observaties $n = 6$ (dus X en Y tellen het aantal successen uit 6 experimenten). De horizontale as toont mogelijke uitkomsten, de verticale as geeft de bijbehorende kansen.

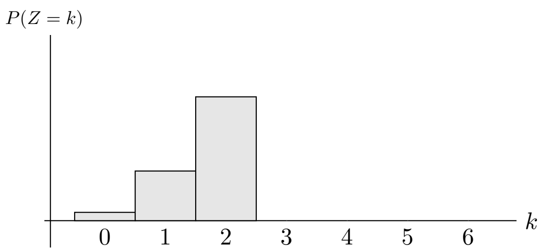




a. Geef met behulp van de grafieken benaderingen van $P(X = 0)$, $P(X \geq 5)$, $P(Y = 0)$ en $P(Y \geq 5)$.

b. Een van de variabelen X en Y heeft succeskans $p = 0.35$, de andere $p = 0.7$. Welke heeft kans 0.7? Verklaar je antwoord.

c. Beschouw nu een binomiaal verdeelde toevalsvariabelen met $n = 6$ en succeskans $p = 0.5$. Schets de bijbehorende grafiek (de eerste drie kansen zijn gegeven):



Opgave 10.8. We hebben een mand met drie konijen, twee cavia's en een olifant. We pakken willekeurig twee dieren uit de mand.

a. Bereken we kans dat we twee cavia's pakken.

b. Bereken de kans dat we een olifant en een cavia pakken.

Stel nu dat dit experiment vier keer uitvoeren (dus twee dieren pakken, terug zetten, weer twee dieren pakken, etcetera).

c. Wat is de kans dat geen enkele keer twee cavia's pakken?

d. Wat is de kans dat we precies 1 keer twee cavia's pakken?

Opgave 10.9. Voor binomiaalcoëfficiënten geldt de identiteit $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ voor alle n en k. Dus bijvoorbeeld geldt er $\binom{10}{7} = \binom{10}{3}$.

a. Verklaar in woorden dat dit waar is, gebruikmakend van het feit dat binomiaalcoëfficiënten volgordes van ballen tellen.

b. Gebruik we definitie van de binomiaalcoëfficiënten om te laten zien dat de identiteit waar is voor algemene n en k (d.w.z. werk beide kanten van het '='-teken uit en observeer dat ze gelijk zijn).

Opgave 10.10.

a. Hoeveel manieren zijn er om 3 groene ballen en 3 blauwe ballen te ordenen?

b. Hoeveel manieren zijn er om 3 groene ballen, 3 blauwe ballen en 2 gele ballen te ordenen?

c. Hoeveel manieren zijn er om n ballen, waarvan k groen, l blauw en m geel zijn, te ordenen?

Opgave 10.11. Vervolg op onderdeel b van Opgave 10.6: als X binomiaal verdeeld is met parameters n en p, dan telt X het aantal successen als we n keer een experiment met succeskans p uitvoeren. Wat is het verwachte aantal successen? Dit wordt ook wel de *verwachtingswaarde* van X genoemd, notatie EX (van "expected value").