Zomercursus Wiskunde A

Week 3, les 2

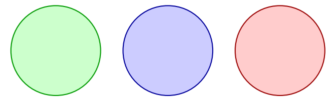
Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

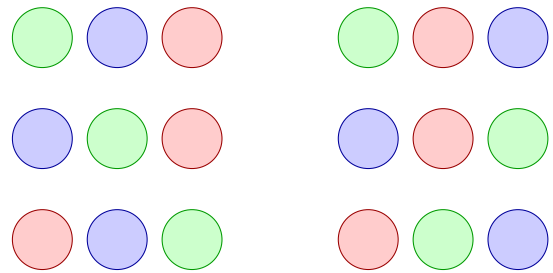
28 juli 2011

Ballen tellen

Hoeveel manieren zijn er om drie verschillende ballen te ordenen?

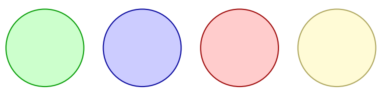


Zes:

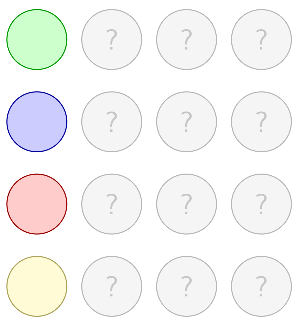


Vier ballen tellen

Er zijn zes manieren om drie ballen te ordenen. En vier ballen?



We beginnen met de eerste bal:



6 manieren

6 manieren

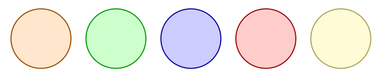
6 manieren

6 manieren

Totaal: $4 \cdot 6 = 24$ manieren.

Meer ballen tellen

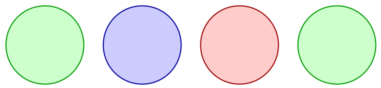
- Er is één manier om 1 bal te ordenen.
- Er zijn $2 \cdot 1 = 2$ manieren om 2 ballen te ordenen.
- Er zijn $3 \cdot 2 = 6$ manieren om 3 ballen te ordenen.
- Er zijn $4 \cdot 6 = 24$ manieren om 4 ballen te ordenen.
- Er zijn $5 \cdot 24 = 120$ manieren om 5 ballen te ordenen.



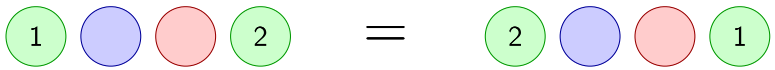
Merk op dat $5 \cdot 24 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$. Voor een getal n schrijven we $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, spreek uit “$n$ faculteit”.
Het aantal manieren om n verschillende ballen te ordenen is $n!$.

Identieke ballen tellen

Wat als er twee ballen hetzelfde zijn?



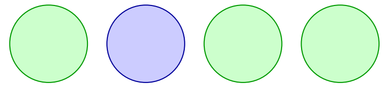
Er waren $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ manieren om 4 verschillende ballen te ordenen, maar hier tellen we elke manier dubbel:



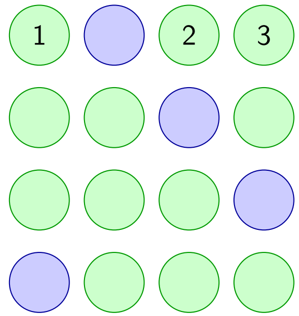
Er zijn dus $24/2 = 12$ manieren om deze ballen te ordenen.

Meer identieke ballen

Wat gebeurt er als drie ballen hetzelfde zijn?

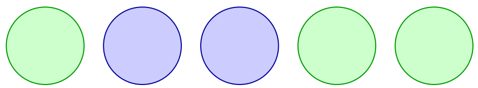


Nu zijn er vier manieren:



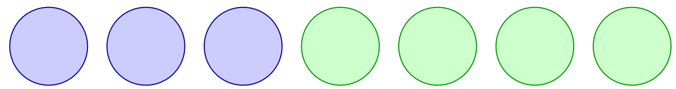
Het aantal mogelijkheden is $4!/3! = 24/6 = 4$.

2 blauw, 3 groen



- Als ze allemaal verschillend waren, zouden er $5! = 120$ manieren zijn.
- Maar we mogen de 2 blauwe ballen op willekeurige manier ordenen, net zoals de 3 groene ballen.
- Er zijn $2! = 2$ manieren om de 2 blauwe ballen te ordenen en $3! = 6$ manieren om de 3 blauwe ballen te ordenen.
- We tellen elke mogelijkheid $2 \cdot 6 = 12$ keer.
- Het aantal manieren is $120/12 = 10$.

3 blauw, 4 groen



Het aantal manieren om deze te ordenen is

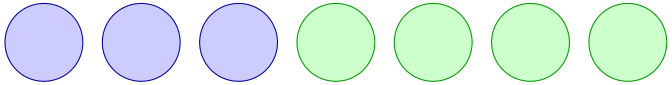
$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{(3 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2)} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 7 \cdot 5 = 35.$$

Als we n ballen hebben, waarvan k blauw en de rest groen, dan is het aantal manieren om deze te ordenen gelijk aan

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$$

wat we uitspreken als "n boven k".

Tellen en kansen



We leggen bovenstaande ballen neer in een willekeurige volgorde. Wat is de kans dat twee blauwe ballen vooraan liggen? Herinner

$$P(A) = \frac{\text{aantal uitkomsten waarbij } A \text{ optreedt}}{\text{totaal aantal uitkomsten}}.$$

Het totaal aantal manieren om de 7 ballen te ordenen is $\frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$.

Het aantal manieren waarbij er 2 blauwe ballen vooraan liggen:

We hebben 1 blauwe bal en 4 groene over om te verdelen over 5 plekken. Dit kan op $\frac{5!}{1! \cdot 4!} = 5$ manieren. De gevraagde kans is dus gelijk aan $\frac{5}{35} = \frac{1}{7}$.

Kop of munt

Stel we gooien 5 munten op. Uitkomsten zijn van de vorm *MMKMK*. We willen weten wat de kans op precies 3 keer kop is.

- Hoeveel mogelijke uitkomsten zijn er? Antwoord: $2^5 = 32$.
- De kans op een uitkomst is $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$.
- Hoeveel uitkomsten hebben precies 3 keer kop? Dit is het aantal manieren om drie M en twee K te ordenen:

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{(3 \cdot 2) \cdot 2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 5 \cdot 2 = 10.$$

- De gevraagde kans is $\frac{10}{32}$.

Wat gebeurt er als de munt niet eerlijk is, bijvoorbeeld als de kans op kop is gelijk aan $\frac{1}{4}$? Dan is de kans op munt $\frac{3}{4}$, dus de kans op een uitkomst zoals *KMKMK* is $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{1024}$. Dit is nog steeds hetzelfde voor de andere uitkomsten met drie keer kop, dus de kans op precies drie keer kop is nu $10 \cdot \frac{9}{1024} = \frac{90}{1024}$.

Nog een voorbeeld

Stel we nemen een willekeurige steekproef van 8 dieren, waarvan elk dier met kans 0.34 een koe is en anders een varken. Wat is de kans dat er precies 5 koeien zijn?

De kans op een uitkomst met precies 5 koeien, zoals *KKVVKVKK* of *KKKKVVVK*, is

$$(0.34)^5 \cdot (1 - 0.34)^3 = (0.34)^5 (0.66)^3 \approx 0.0013.$$

Het aantal uitkomsten met 5 koeien is

$$\frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2)} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 = 56,$$

dus de kans op 5 koeien is ongeveer

$$56 \cdot 0.0013 = 0.073.$$

In het algemeen

Als we een experiment n keer uitvoeren, waarbij elk experiment succeskans p heeft, dan is de kans op precies k successen gelijk aan

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Als X gelijk is aan het aantal successen, dan is X een *discrete toevalsvariabele* met als mogelijke uitkomsten $\{0, 1, \ldots, n-1, n\}$ en we hebben

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

We zeggen dat X een *binomiale verdeling* heeft met n waarnemingen en succeskans p. De getallen $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ worden *binomiaalcoëfficiënten* genoemd.

Voorbeeld

We pakken vijf keer 2 ballen uit een vaas met 2 groene en 2 rode ballen. Wat is de kans dat we precies drie keer 2 rode ballen pakken?

- De variabele $X =$"aantal keer dat we 2 rode ballen pakken" is binomiaal verdeeld met $n = 5$ en p de kans op 2 rode ballen in 1 experiment. We zijn geïnteresseerd in $P(X = 3)$.
- Om p te berekenen gebruiken we

$$P(A) = \frac{\text{aantal uitkomsten waarbij } A \text{ optreedt}}{\text{totaal aantal uitkomsten}}.$$

- Als we alle ballen nummeren, zijn er $4 \cdot 3 = 12$ manieren om 2 ballen te pakken uit de vaas.
- Hiervan zijn er $2 \cdot 1 = 2$ mogelijkheden met 2 rode ballen.
- Er geldt dus $p = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.
- $P(X = 3) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0.03.$