Zomercursus Wiskunde A

Week 3, les 3

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

28 juli 2011

Toevalsvariabelen

Als D het aantal ogen van een worp van een dobbelsteen is, is deze D een *stochast* of *toevalsvariabele*: het is een variabele die de uitkomst van een toevalsexperiment weergeeft. In dit geval neemt D waarden aan in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en elke waarde met kans $\frac{1}{6}$, dus

$$P(D = i) = \tfrac{1}{6} \quad \text{voor } i \text{ in } \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \tag{1}$$

D is *discreet*: hij heeft een aftelbare (zelfs eindige) verzameling mogelijke waardes. Zijn *kansverdeling* wordt gegeven door (1).

Een ander voorbeeld van een discrete stochast: we gooien een munt net zolang totdat we kop krijgen en geven met N het aantal keer gooien weer. Dan is N een stochast die waarden aanneemt in

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\},$$

wat een oneindige verzameling is, maar nog steeds "aftelbaar". In dit geval wordt de kansverdeling gegeven door

$$P(N = i) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^i.$$

Continue stochasten

Beschouw het volgende experiment. We nemen een meetlint:

We spelden hem op een muur en gooien er een pijltje naar. We noteren de (horizontale) positie X van het pijltje. Dit is een *continue* stochast: zijn waarde kan elk getal tussen 0 en 1 zijn.

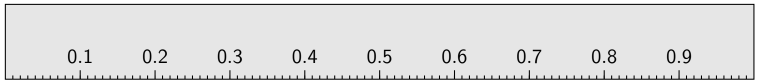
Onder de aanname dat elke uitkomst even waarschijnlijk is, kunnen we kansen berekenen van de vorm $P(X \leq 0.5) = \frac{1}{2}$ en $P(0.5 \leq X \leq 0.6) = \frac{1}{10}$.

Echter, wat is $P(X = 0.5)$? Antwoord: nul. Het pijltje zit nooit precies op positie 0.5.

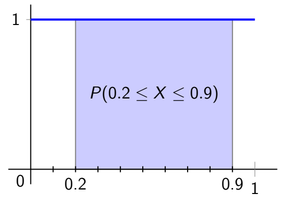
Dus hoewel een discrete kansverdeling simpelweg bestaat uit de kansen op alle afzonderlijke uitkomsten, werkt dit niet in het continue geval. Hoe specificeren we hier een kansverdeling?

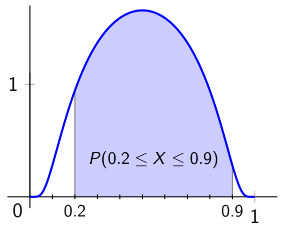
Continue stochasten

Beschouw het volgende experiment. We nemen een meetlint:



We spelden hem op een muur en gooien er een pijltje naar. We noteren de (horizontale) positie X van het pijltje. Hoe specificeren we een kansverdeling voor X?
Een mogelijkheid is m.b.v. een *dichtheidskromme*, waar de oppervlakte onder de kromme de kans weergeeft.



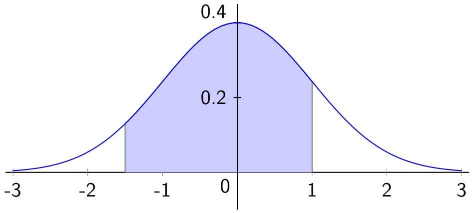


Dichtheidskrommen

Een *dichtheid* voor een continue stochast X is een kromme die altijd boven de x-as ligt zodat de totale oppervlakte onder de kromme gelijk aan 1 is. We hebben

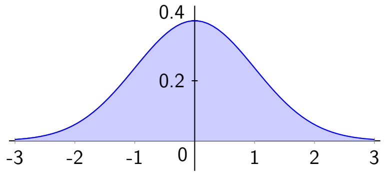
$$P(a \leq X \leq b) = \text{oppervlakte onder de kromme tussen a en b.}$$

Een voorbeeld van een dichtheid:

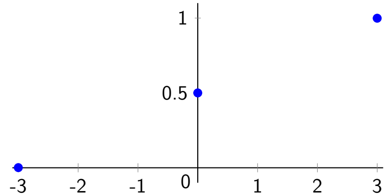


Verdelingsfuncties

Bekijk de functie $F(x) = P(X \leq x)$. Dus $F(1)$ geeft bijvoorbeeld de kans dat X kleiner dan 1 is. We bekijken de grafiek van $F(x)$:



Dichtheid van X



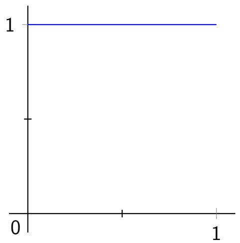
Grafiek van $F(x)$

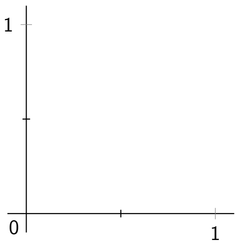
We noemen deze functie F de *verdelingsfunctie* van X.

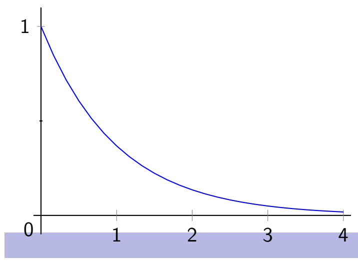
Voorbeelden van verdelingsfuncties

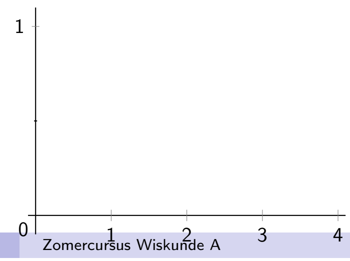
Dichtheid

Verdelingsfunctie



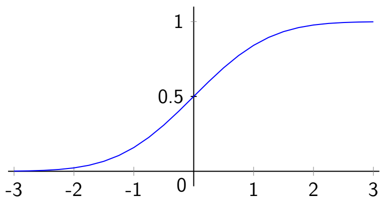


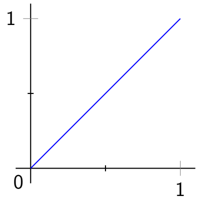




Eigenschappen van verdelingsfuncties

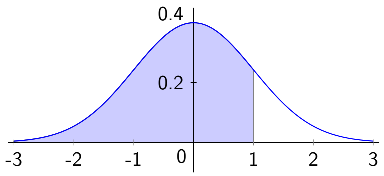
Verdelingsfuncties:





Iedere verdelingsfunctie

- begint in 0,
- eindigt in 1, en
- is altijd stijgend.

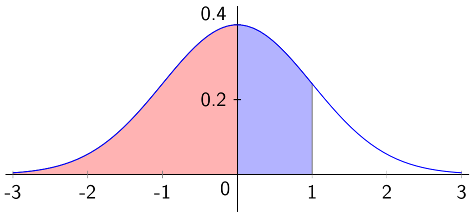


Dichtheid

Rekenen met verdelingsfuncties

Stel dat we de verdelingsfunctie F van een zekere continue stochast X kennen. Dan kunnen we kansen berekenen:

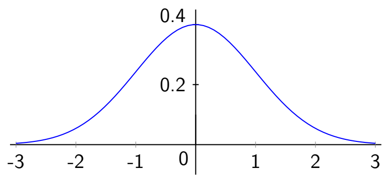
- $P(X \leq 1) = F(1)$
- $P(X < 1) = P(X \leq 1) = F(1)$ (X moet continu zijn!)
- $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1)$
- $P(0 \leq X \leq 1) = F(1) - F(0)$



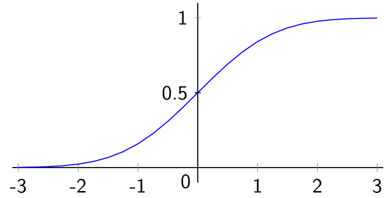
Dichtheid

Van verdelingsfunctie naar dichtheid

Als we de verdelingsfunctie kennen, kunnen we dan de dichtheid vinden?



Dichtheid van X



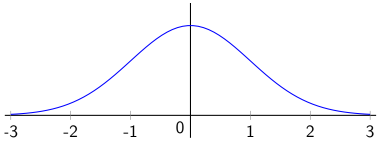
Verdelingsfunctie van X

Antwoord: ja! Als we naar de helling van de verdelingsfunctie kijken, zien we de dichtheid terug.

Dit komt overeen met het nemen van de *afgeleide*: de dichtheid is gelijk aan $F'(x)$.

Normale verdeling

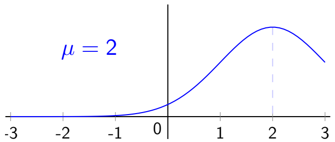
Als X een continue toevalsvariabele is met dichtheid

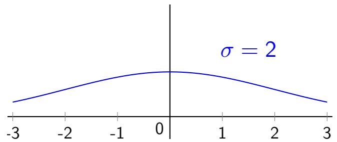


$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\pi \approx 3.141, e \approx 2.718$$

dan noemen we X *standaardnormaal verdeeld* ($\mu = 0$, $\sigma = 1$). Deze verdeling is *symmetrisch*: $P(X \leq 0) = P(X \geq 0) = \frac{1}{2}$. We kunnen de dichtheid verschuiven of uitrekken om de normale verdeling met *gemiddelde* μ en *standaardafwijking* σ te krijgen:





De parameter μ geeft de locatie van de top. σ geeft aan hoe uitgespreid de verdeling is.

Verwachtingswaarde

De *verwachtingswaarde* of *verwachting* EX van een stochast X is de gemiddelde waarde die we verwachten te zien als we het experiment veelvuldig uitvoeren.

- Als X binomiaal verdeeld is met $n = 8$ en $p = \frac{1}{4}$, m.a.w. we observeren 8 experimenten met succeskans $\frac{1}{4}$ en tellen het aantal successen, dan verwachten we gemiddeld 2 successen te krijgen. Dus $EX = 2$.
- Als Y binomiaal verdeeld is met $n = 15$ en $p = \frac{1}{2}$, dan hebben we $EX = \frac{15}{2} = 7.5$.
- Als Z binomiaal verdeeld is met n en p willekeurig, dan $EZ = np$.