

Zomercursus Wiskunde A

Week 1, les 3

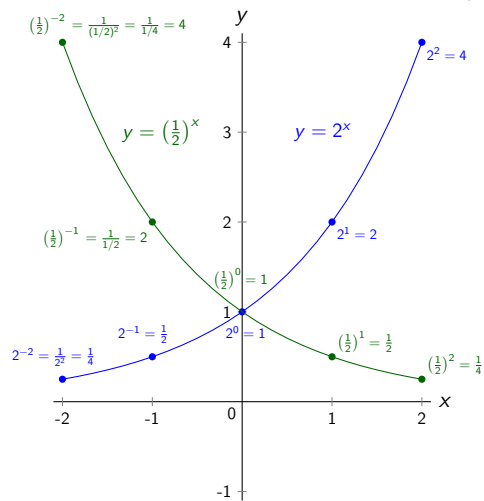
Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam



14 juli 2011

Exponentiële functies

Bekijk de functies $f(x) = 2^x$, $g(x) = (\frac{1}{2})^x$.



Regels voor machtsverheffen

$$\begin{aligned} g^{a+b} &= g^a g^b \\ g^0 &= 1 \\ g^{-a} &= \frac{1}{g^a} \\ g^{b-a} &= \frac{g^b}{g^a} \\ (g^a)^b &= g^{ab} \\ (gh)^a &= g^a h^a \\ g^{1/a} &= \sqrt[a]{g} \end{aligned}$$

Machten

Machtsverheffen:

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$$

Regels zijn waar:

$$\begin{aligned} g^{a+b} &= \underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g \cdot g}_{a+b \text{ keer}} \\ &= \underbrace{g \cdot \dots \cdot g}_{a \text{ keer}} \cdot \underbrace{g \cdot \dots \cdot g}_{b \text{ keer}} = g^a g^b. \end{aligned}$$

Worteltrekken is het omgekeerde:

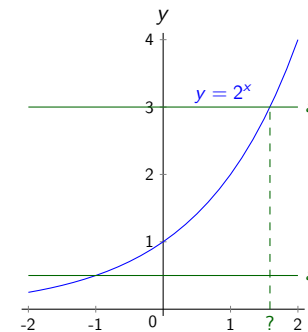
$$\begin{aligned} 5^2 = 25 &\Rightarrow \sqrt{25} = \sqrt{25} = 5 \\ a^3 = b &\Rightarrow a = \sqrt[3]{b}. \end{aligned}$$

Regels voor machtsverheffen

$$\begin{aligned} g^{a+b} &= g^a g^b \\ g^0 &= 1 \\ g^{-a} &= \frac{1}{g^a} \\ g^{b-a} &= \frac{g^b}{g^a} \\ (g^a)^b &= g^{ab} \\ (gh)^a &= g^a h^a \\ g^{1/a} &= \sqrt[a]{g} \end{aligned}$$

Exponentiële vergelijkingen

We willen oplossen $2^x = a$.



Regels voor machtsverheffen

$$\begin{aligned} g^{a+b} &= g^a g^b \\ g^0 &= 1 \\ g^{-a} &= \frac{1}{g^a} \\ g^{b-a} &= \frac{g^b}{g^a} \\ (g^a)^b &= g^{ab} \\ (gh)^a &= g^a h^a \\ g^{1/a} &= \sqrt[a]{g} \end{aligned}$$

We hebben:

$$\begin{aligned} 2^x = \frac{1}{2} &\Rightarrow x = {}^2\log \frac{1}{2} = -1 \\ 2^x = 3 &\Rightarrow x = {}^2\log 3 \approx 1.6 \end{aligned}$$

Logaritmen

De oplossing van de vergelijking $2^x = a$ is $x = {}^2\log a$. Meer algemeen is $x = {}^g\log a$ de oplossing van $g^x = a$. Dus:

$$g^{{}^g\log a} = a.$$

Voorbeelden:

$${}^3\log 9 = 2 \quad \text{want } 3^2 = 9$$

$${}^5\log \frac{1}{25} = -2 \quad \text{want } 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

$${}^g\log 1 = 0 \quad \text{want } g^0 = 1$$

$${}^g\log(-1) \text{ bestaat niet} \quad \text{want } g^x > 0$$

$${}^{1/2}\log 2 = -1 \quad \text{want } \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{1/2} = 2$$

$${}^3\log \sqrt{3} = \frac{1}{2} \quad \text{want } \sqrt{3} = 3^{1/2}$$

Regels voor machtsverheffen

$$g^{a+b} = g^a g^b$$

$$g^0 = 1$$

$$g^{-a} = \frac{1}{g^a}$$

$$g^{b-a} = \frac{g^b}{g^a}$$

$$(g^a)^b = g^{ab}$$

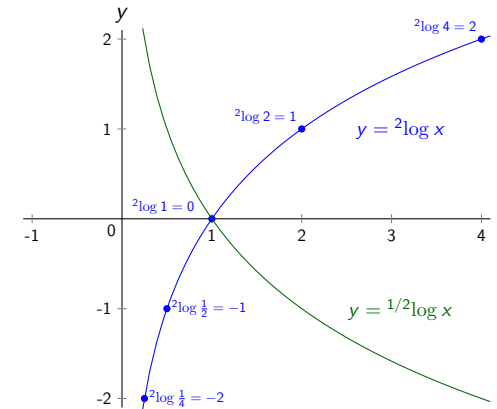
$$(gh)^a = g^a h^a$$

$$g^{1/a} = \sqrt[a]{g}$$

Zomercursus Wiskunde A

Grafiek van de logaritme

De logaritme $y = {}^2\log a$ is de oplossing van de vergelijking $2^y = a$. Bekijk de functies $f(x) = {}^2\log x$, $g(x) = {}^{1/2}\log x$.



Zomercursus Wiskunde A

Vergelijkingen met logaritmen

De vergelijking ${}^g\log x = a$ heeft als oplossing $x = g^a$:

$${}^g\log g^a = a \quad {}^g\log g = 1.$$

Voorbeelden:

$${}^2\log(x-2) = 3 \Rightarrow x-2 = 2^3,$$

dus $x = 2^3 + 2 = 10$. Verder:

$${}^2\log(2x-2) + {}^2\log x = 2$$

$${}^2\log(x(2x-2)) = 2$$

$${}^2\log(2x^2 - 2x) = 2$$

$$2x^2 - 2x = 2^2$$

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Regels voor machtsverheffen

$$g^{a+b} = g^a g^b$$

$$g^0 = 1$$

$$g^{-a} = \frac{1}{g^a}$$

$$(g^a)^b = g^{ab}$$

Regels voor logaritmen

$$g^x = a \Rightarrow x = {}^g\log a$$

$${}^g\log a + {}^g\log b = {}^g\log(ab)$$

$${}^g\log a - {}^g\log b = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$${}^g\log a^n = n \cdot {}^g\log a$$

$${}^g\log a = \frac{{}^h\log a}{{}^h\log g}.$$

Zomercursus Wiskunde A

Vergelijkingen met logaritmen

De vergelijking ${}^g\log x = a$ heeft als oplossing $x = g^a$:

$${}^g\log g^a = a \quad {}^g\log g = 1.$$

Voorbeelden:

$${}^3\log(x-1) + {}^{1/3}\log x = 1$$

$${}^3\log(x-1) + \frac{{}^3\log x}{{}^3\log 1/3} = 1$$

$${}^3\log(x-1) + \frac{{}^3\log x}{-1} = 1$$

$${}^3\log(x-1) - {}^3\log x = 1$$

$${}^3\log \frac{x-1}{x} = 1$$

$$\frac{x-1}{x} = 3$$

$$x-1 = 3x$$

Regels voor machtsverheffen

$$g^{a+b} = g^a g^b$$

$$g^0 = 1$$

$$g^{-a} = \frac{1}{g^a}$$

$$(g^a)^b = g^{ab}$$

Regels voor logaritmen

$$g^x = a \Rightarrow x = {}^g\log a$$

$${}^g\log a + {}^g\log b = {}^g\log(ab)$$

$${}^g\log a - {}^g\log b = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$${}^g\log a^n = n \cdot {}^g\log a$$

$${}^g\log a = \frac{{}^h\log a}{{}^h\log g}.$$

Zomercursus Wiskunde A