Zomercursus Wiskunde A

Week 2, les 1

Gerrit Oomens

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

18 juli 2011

Regels voor differentiëren

We kunnen nu machtsfuncties differentiëren:

$$f(x) = x^2 - x + 1, \quad g(x) = 3\sqrt{x} - x + \tfrac{1}{x^4}.$$

Maar hoe differentiëren we $h(x) = (x^2-3)^7$? Dit is een *samenstelling* van de twee functies $f(u) = u^7$ en $u = x^2 - 3$. In dit geval geldt de *kettingregel* $[f(u)]' = f'(u)u'$.

$$f(u) = u^7 \qquad u = x^2 - 3$$

$$f'(u) = 7u^6 \qquad u' = 2x$$

$$f'(x) = 7u^6 2x = 14xu^6 = 14x(x^2-3)^6$$

$f(x)$	$f'(x)$
1	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}

$$[f+g]' = f' + g'$$

$$[cf]' = cf'$$

$$[f(u)]' = f'(u)u'$$

Regels voor differentiëren

De kettingregel $[f(u)]' = f'(u)u'$ geeft afgeleides van samengestelde functies. Bijv.: $f(x) = (2x-1)^{100}$, $g(x) = (\sqrt{x}-1)^5$

$$f(u) = u^{100} \qquad u = 2x - 1$$

$$f'(u) = 100u^{99} \qquad u' = 2$$

$$f'(x) = 100u^{99} \cdot 2 = 200u^{99}$$

$$= 200(2x-1)^{99}$$

$$g(u) = u^5 \qquad u = \sqrt{x} - 1$$

$$g'(u) = 5u^4 \qquad u' = \tfrac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(x) = 5u^4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5(\sqrt{x}-1)^4}{2\sqrt{x}}$$

$f(x)$	$f'(x)$
1	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}

$$[f+g]' = f' + g'$$

$$[cf]' = cf'$$

$$[f(u)]' = f'(u)u'$$

Regels voor differentiëren

Voorbeeld: $h(x) = \frac{1}{(3x^2-5)^6} = (3x^2-5)^{-6}$

$$h(u) = u^{-6} \qquad u = 3x^2 - 5$$

$$h'(u) = -6u^{-7} \qquad u' = 6x$$

$$h'(x) = -6u^{-7} \cdot 6x = -36x(3x^2-5)^{-7}$$

$$= \frac{-36x}{(3x^2-5)^7}$$

Nog een voorbeeld: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

$$f(u) = \sqrt{u} \qquad u = 1 - x^2$$

$$f'(u) = \tfrac{1}{2\sqrt{u}} \qquad u' = -2x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (-2x) = -\frac{2x}{2\sqrt{u}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$f(x)$	$f'(x)$
1	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}

$$[f+g]' = f' + g'$$

$$[cf]' = cf'$$

$$[f(u)]' = f'(u)u'$$

Product- en quotiëntregel

Afgeleides van producten en quotiënten:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$\left[\frac{t(x)}{n(x)}\right]' = \frac{n(x)t'(x) - t(x)n'(x)}{n(x)^2}.$$

$f(x)$	$f'(x)$
1	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}

Voorbeelden:

$$k(x) = (x^2+3)(4-x-x^3)$$
$$k'(x) = 2x(4-x-x^3) + (x^2+3)(-1-3x^2)$$

$$\ell(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$$
$$\ell'(x) = \frac{(x^3+1)\cdot 2x - x^2\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{2x^4+2x-3x^4}{(x^3+1)^2} = \frac{2x-x^4}{(x^3+1)^2}.$$

Voorbeelden van afgeleides

Bekijk $f(x) = (x^2+2)^4\sqrt{x}$.

$$f'(x) = \left[(x^2+2)^4\right]'\sqrt{x} + (x^2+2)^4\left[\sqrt{x}\right]'$$
$$= 4(x^2+2)^3 2x\sqrt{x} + (x^2+2)^4\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= 8(x^2+2)^3 x\sqrt{x} + \frac{(x^2+2)^4}{2\sqrt{x}}$$

$f(x)$	$f'(x)$
1	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}

Dus we berekenen de afgeleide van $g(x) = (x^2+2)^4$:

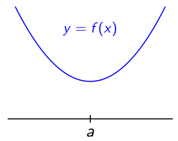
$$g(u) = u^4 \qquad u = x^2+2$$
$$g'(u) = 4u^3 \qquad u' = 2x$$
$$g'(x) = 4u^3 2x = 4(x^2+2)^3 2x$$

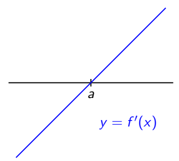
$$[f+g]' = f' + g'$$
$$[cf]' = cf'$$
$$[fg]' = f'g + fg'$$
$$\left[\tfrac{t}{n}\right]' = \frac{nt'-tn'}{n^2}$$
$$[f(u)]' = f'(u)u'$$

Maximum, minimum of buigpunt

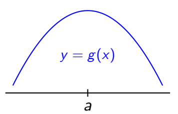
Als $f'(a) = 0$, is dit een maximum, minimum of buigpunt?

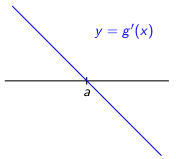
minimum
f' stijgend in a
$f''(a) > 0$



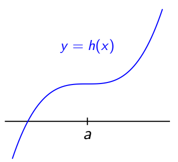


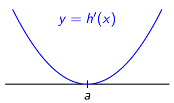
maximum
f' dalend in a
$f''(a) < 0$





buigpunt
f' horizontaal in a
$f''(a) = 0$



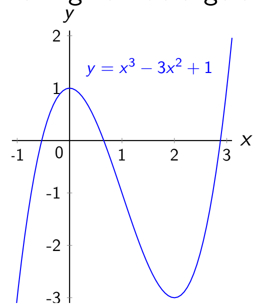


Tweede afgeleide

De *tweede afgeleide* $f''(x)$ van f geeft de helling van de afgeleide.

Voorbeeld:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$
$$f''(x) = 6x - 6.$$



Hiermee vinden we toppen:

- als $f'(a) = 0$ en $f''(a) < 0$ heeft f een maximum in $x = a$,
- als $f'(a) = 0$ en $f''(a) > 0$ heeft f een minimum in $x = a$.

In dit geval zijn de nulpunten van $f'(x)$ gelijk aan $x = 0$ en $x = 2$. We hebben $f''(0) = -6$, dus $(0,1)$ is een maximum. Verder is $f''(2) = 12 - 6 = 6$, dus $(2,-3)$ is een minimum.