Zomercursus Wiskunde A

Week 2, les 2

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

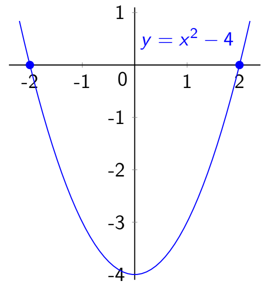
19 juli 2011

Domein

Het *domein* van een functie f bestaat uit alle x waarvoor $f(x)$ gedefinieerd is.

$f(x)$	Domein
$x^3 - 3x$	$\mathbb{R}$ (alle getallen)
$\sqrt{x}$	$x \geq 0$
$x^2 - 2^x$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x+4}$	$x \geq -4$
${}^2\log(2x-3)$	$x > \frac{3}{2}$
$\dfrac{2^x+4}{x-4}$	$x \neq 4$
${}^{x^3}\log(x^2-4)$	$x > 2$ of $x < -2$
$\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+2x-3}$	$x \geq 0$ en $x \neq 1$
x^{-1}	$x \neq 0$

We lossen op $x^2 - 4 > 0$. De vergelijking $x^2 - 4 = 0$ heeft als oplossingen ± 2. Plaatje:



Domein

Het *domein* van een functie f bestaat uit alle x waarvoor $f(x)$ gedefinieerd is.

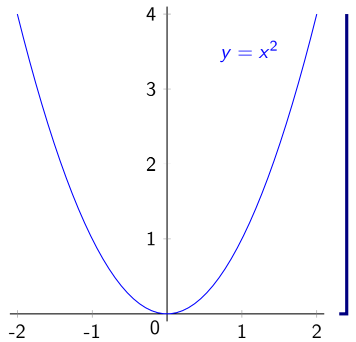
$f(x)$	Domein
$x^3 - 3x$	$\mathbb{R}$ (alle getallen)
$\sqrt{x}$	$x \geq 0$
$x^2 - 2^x$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x+4}$	$x \geq -4$
${}^2\log(2x-3)$	$x > \frac{3}{2}$
$\dfrac{2^x+4}{x-4}$	$x \neq 4$
${}^{x^3}\log(x^2-4)$	$x > 2$ of $x < -2$
$\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+2x-3}$	$x \geq 0$ en $x \neq 1$
x^{-1}	$x \neq 0$

In het algemeen

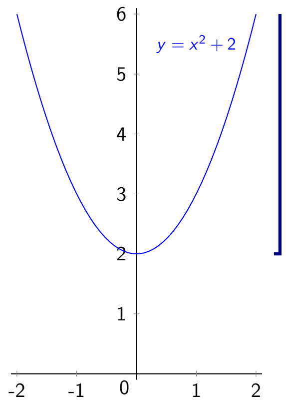
- wat onder een wortel staat moet ≥ 0 zijn
- wat in een logaritme staat moet > 0 zijn
- wat in een noemer staat moet $\neq 0$ zijn

Bereik

Het *bereik* van een functie bestaat uit alle waardes die de functie aanneemt.



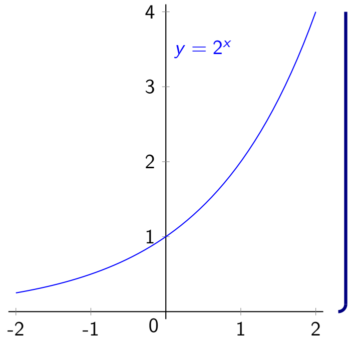
bereik $y \geq 0$



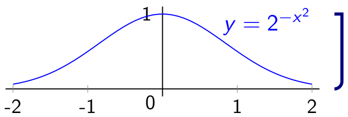
bereik $y \geq 2$

Bereik

Het *bereik* van een functie bestaat uit alle waardes die de functie aanneemt.



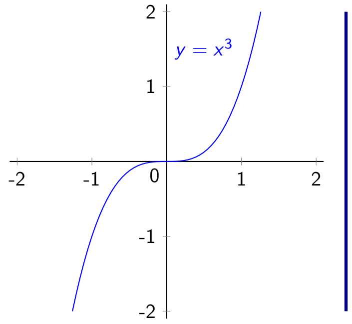
bereik $y > 0$



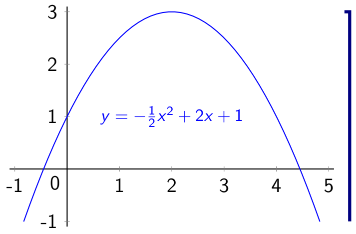
bereik $0 < y \leq 1$

Bereik

Het *bereik* van een functie bestaat uit alle waardes die de functie aanneemt.



bereik $\mathbb{R}$



bereik $y \leq 3$

Functieonderzoek

Bekijk $f(x) = x^4 - 2x^2$.

- Domein: $\mathbb{R}$.
- Nulpunten: $x^4 - 2x^2 = 0$ geeft $x^2(x^2 - 2) = 0$, dus $x^2 = 0$ of $x^2 - 2 = 0$. We vinden $x = 0$, $x = \sqrt{2}$ en $x = -\sqrt{2}$.
- Toppen: maximum in $(0, 0)$, minima in $(1, -1)$ en $(-1, -1)$.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = x(4x^2 - 4) = 0$$

geeft $x = 0$ of

$$4x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1,$$

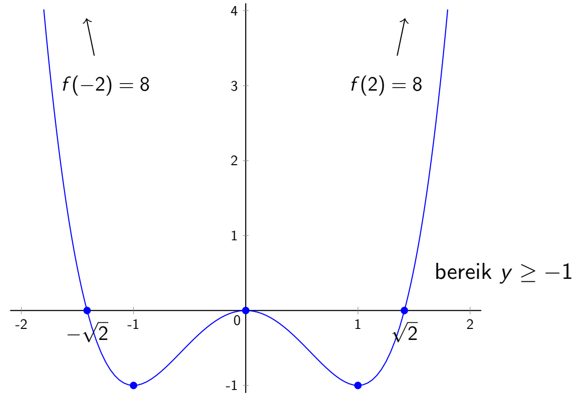
dus $x = 1$ of $x = -1$. Er geldt $f''(x) = 12x^2 - 4$. We vinden

$$\begin{aligned} f''(0) &= -4 & &\text{maximum in } \big(0, f(0)\big) = (0, 0) \\ f''(1) &= 8 & &\text{minimum in } \big(1, f(1)\big) = (1, -1) \\ f''(-1) &= 8 & &\text{minimum in } \big(-1, f(-1)\big) = (-1, -1) \end{aligned}$$

Functieonderzoek

Bekijk $f(x) = x^4 - 2x^2$.

- Domein: $\mathbb{R}$.
- Nulpunten: $x^4 - 2x^2 = 0$ geeft $x^2(x^2 - 2) = 0$, dus $x^2 = 0$ of $x^2 - 2 = 0$. We vinden $x = 0$, $x = \sqrt{2}$ en $x = -\sqrt{2}$.
- Toppen: maximum in $(0, 0)$, minima in $(1, -1)$ en $(-1, -1)$.



Functieonderzoek

Bekijk $g(x) = \frac{x^2-2x+1}{x+2}$.

- Domein: $x \neq -2$ (*asymptoot* in $x = -2$)
- Toppen: minimum in $(1, 0)$, maximum in $(-5, -12)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(x+2)(2x-2) - (x^2-2x+1)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x^2+4x-2x-4-x^2+2x-1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Dit geeft $(x+5)(x-1) = 0$, dus $x = -5$ of $x = 1$.

Functieonderzoek

Bekijk $g(x) = \frac{x^2-2x+1}{x+2}$.

- Domein: $x \neq -2$ (*asymptoot* in $x = -2$)
- Toppen: minimum in $(1, 0)$, maximum in $(-5, -12)$

$$g'(x) = \frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2} = 0.$$

Dit geeft $(x+5)(x-1) = 0$, dus $x = -5$ of $x = 1$.

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{(x+2)^2(2x+4) - (x^2+4x-5)\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} \\ &= \frac{(x+2)(2x+4) - 2(x^2+4x-5)}{(x+2)^3} \\ &= \frac{2x^2+4x+4x+8-2x^2-8x+10}{(x+2)^3} = \frac{18}{(x+2)^3}. \end{aligned}$$

Functieonderzoek

Bekijk $g(x) = \frac{x^2-2x+1}{x+2}$.

- Domein: $x \neq -2$ (*asymptoot* in $x = -2$)
- Toppen: minimum in $(1, 0)$, maximum in $(-5, -12)$

$$g'(x) = \frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2} = 0.$$

Dit geeft $(x+5)(x-1) = 0$, dus $x = -5$ of $x = 1$.

$$g''(x) = \frac{18}{(x+2)^3}.$$

We vinden $g''(1) = 18/3^3 > 0$ en $g''(-5) = 18/(-3)^3 < 0$.
Verder is $g(1) = 0$ en $g(-5) = \frac{25+10+1}{-3} = -\frac{36}{3} = -12$.

Functieonderzoek

Bekijk $g(x) = \frac{x^2-2x+1}{x+2}$.

- Domein: $x \neq -2$ (*asymptoot* in $x = -2$)
- Toppen: minimum in $(1, 0)$, maximum in $(-5, -12)$
- Nulpunten: $(x-1)(x-1) = 0$ geeft $x = 1$