Zomercursus Wiskunde A

Week 2, les 3

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

21 juli 2011

Rekenen met machten

Schrijf zonder gebroken of negatieve machten

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$
$$3^{-1} = \tfrac{1}{3}$$
$$3^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$
$$3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{3}\cdot 2} = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{3}\right)^2$$
$$= 3^{2\cdot\frac{1}{3}} = \left(3^2\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Regels voor machtsverheffen

$$g^{a+b} = g^a g^b$$
$$g^0 = 1$$
$$g^{-a} = \tfrac{1}{g^a}$$
$$g^{b-a} = \tfrac{g^b}{g^a}$$
$$\left(g^a\right)^b = g^{ab}$$
$$(gh)^a = g^a h^a$$
$$g^{1/a} = \sqrt[a]{g}$$

Rekenen met logaritmes

Herinner: ${}^g\log a$ is de oplossing x van $g^x = a$.
In het bijzonder is ${}^g\log g^b$ de oplossing van de vergelijking $g^x = g^b$, dus ${}^g\log g^b = b$.

$${}^2\log 2 = 1$$
$${}^3\log\sqrt{3} = {}^3\log 3^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}$$
$${}^4\log 2 = {}^4\log\sqrt{4} = {}^4\log 4^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}$$
$${}^7\log 49 = {}^7\log 7^2 = 2$$
$${}^5\log\left(5\sqrt{5}\right) = {}^5\log\left(5\cdot 5^{\frac{1}{2}}\right) = {}^5\log 5^{\frac{3}{2}} = \tfrac{3}{2}$$
$${}^3\log\tfrac{1}{9} = {}^3\log\tfrac{1}{3^2} = {}^3\log 3^{-2} = -2$$

Regels voor machtsverheffen

$$g^{a+b} = g^a g^b$$
$$g^0 = 1$$
$$g^{-a} = \tfrac{1}{g^a}$$
$$g^{b-a} = \tfrac{g^b}{g^a}$$
$$\left(g^a\right)^b = g^{ab}$$
$$(gh)^a = g^a h^a$$
$$g^{1/a} = \sqrt[a]{g}$$

Eenvoudige vergelijkingen

- Exponentiële vergelijking $g^x = a \quad\Rightarrow\quad x = {}^g\log a$.
- Logaritmische vergelijking ${}^g\log x = a \quad\Rightarrow\quad x = g^a$.
- Machten: $x^a = b \quad\Rightarrow\quad x = b^{\frac{1}{a}}$ (mogelijk ook $x = -b^{\frac{1}{a}}$).

$$2^x = 3 \quad\Rightarrow\quad x = {}^2\log 3$$
$${}^2\log x = 3 \quad\Rightarrow\quad x = 2^3 = 8$$
$$x^2 = 3 \quad\Rightarrow\quad x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \qquad \text{of} \quad x = -\sqrt{3}$$
$$x^{\frac{2}{3}} = 3 \quad\Rightarrow\quad x = 3^{\frac{3}{2}} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{27} \qquad \text{of} \quad x = -\sqrt{27}$$
$$x^{-\frac{2}{3}} = 3 \quad\Rightarrow\quad x = 3^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{27}} \qquad \text{of} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{27}}$$
$$x^3 = 3 \quad\Rightarrow\quad x = \sqrt[3]{3}$$
$$x^{\frac{3}{2}} = 3 \quad\Rightarrow\quad x = 3^{\frac{2}{3}} = \left(3^2\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9}$$

Vergelijkingen: vervolg

Bij het oplossen van ingewikkeldere vergelijkingen helpt het om dingen buiten haakjes te halen:

$$2x3^x - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(2\cdot 3^x - 1) = 0.$$

Hiermee vinden we $x = 0$ of $2\cdot 3^x - 1 = 0$. Dit laatste geeft $x = {}^3\!\log \frac{1}{2}$

$$2\cdot 3^x = 1 \quad \Rightarrow \quad 3^x = \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = {}^3\!\log \tfrac{1}{2}.$$

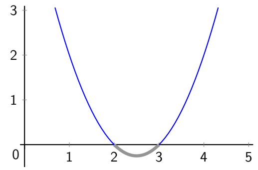
Zo ook

$$x2^x + 2^x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2^x(x+1) = 0.$$

Dit geeft $2^x = 0$ of $x + 1 = 0$. Het eerste kan niet, en het tweede geeft $x = -1$.

Ongelijkheden

Om een ongelijkheid van de vorm $x^2 - 5x + 6 < 0$ op te lossen, lossen we eerst de vergelijking $x^2 - 5x + 6 = 0$ op. We krijgen dan $(x-2)(x-3) = 0$, dus $x = 2$ en $x = 3$. We kijken dan naar de grafiek om te zien waar hij kleiner dan 0 is:



$$\Rightarrow \quad 2 < x < 3$$

Wat doen we als de grafiek niet direct duidelijk is, zoals bij de ongelijkheid $f(x) = (x-2)(x+1)(x+3) \leq 0$?

$-$	-3	$+$	-1	$-$	2	$+$
$f(-4) = -18$		$f(-2) = 4$		$f(0) = -6$		$f(3) = 24$

Dus de ongelijkheid geldt voor $-1 \leq x \leq 2$ en voor $x \leq -3$.

Breuken

- Optellen met gelijke noemers: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.
- Anders gelijknamig maken: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$.
- Vermenigvuldigen: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.
- Delen is vermenigvuldigen met het omgekeerde: $a/\frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}$.
- Vereenvoudigen: $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.

$$\frac{x^3 - x^2}{4x^2} = \frac{x^2(x-1)}{4x^2} = \frac{x-1}{4}, \quad x \neq 0$$

$$\frac{(x-1)\cdot {}^3\!\log x - (x-1)^2 2^x}{(x-1)^3} = \frac{{}^3\!\log x - (x-1)2^x}{(x-1)^2}$$

$$\frac{(x-1) + (1-x)5^x}{x-1} = \frac{(x-1) - (x-1)5^x}{x-1} = 1 - 5^x, \quad x \neq 1$$