Zomercursus Wiskunde A

Week 3, les 1

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

25 juli 2011

Kans en dobbelstenen

Beschouw een 6-vlaks dobbelsteen.

- Als we de dobbelsteen gooien, is de uitkomst *willekeurig*: we kunnen de uitkomst niet voorspellen.
- Er zijn zes mogelijke uitkomsten: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Elke uitkomst is even waarschijnlijk.

- Als we de dobbelsteen 60 keer gooien, verwachten we ongeveer 10 enen te krijgen.
- Als we N keer gooien, verwachten we $N/6$ enen.
- De *kans* op het gooien van een één is $\frac{1}{6}$.

Kans

Definitie

De *kans* op een uitkomst is gedefiniëerd als de proportie van het aantal keren dat de uitkomst zou optreden in een zeer lange reeks van herhalingen.

Merk op:

- Kans heeft alleen betekenis als we een experiment beschouwen dat een groot aantal keren kan worden herhaald, zoals het gooien van een dobbelsteen.
- Elke keer dat we het experiment uitvoeren, moeten de omstandigheden exact hetzelfde zijn.
- In de praktijk komt dit nooit voor: géén twee experimenten zijn identiek hetzelfde. De verschillen zijn echter vaak zo klein, dat we ze mogen negeren.

Uitkomsten en gebeurtenissen

We gaan weer terug naar de zes-vlaks dobbelsteen.

- De zes uitkomsten vormen de *uitkomstenruimte*
  $$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$
- We kunnen een kans toekennen aan elke uitkomst, maar er zijn ook andere *gebeurtenissen* waar we een kans aan kunnen verbinden. Bijvoorbeeld, de kans dat we een even getal gooien is gelijk aan $\frac{1}{2}$.
- Een dergelijke gebeurtenis is een deelverzameling van de uitkomstenruimte. Bijvoorbeeld, de gebeurtenis "even getal" correspondeert met de verzameling $\{2, 4, 6\}$.
- Op dezelfde manier wordt de gebeurtenis "minder dan vijf" gegeven door de verzameling $\{1, 2, 3, 4\}$. De kans op deze gebeurtenis is $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
- We schrijven
  $$P(\text{minder dan vijf}) = P(\{1, 2, 3, 4\}) = \tfrac{2}{3}.$$

Kansmodel

We beschouwen een toevoelsexperiment.

Definitie

- De *uitkomstenruimte* is de verzameling van alle mogelijke uitkomsten.
- Een *gebeurtenis* is een verzameling mogelijke uitkomsten, oftewel een deelverzameling van de uitkomstenruimte.
- Een *kansmaat* P is een manier om kansen aan gebeurtenissen toe te kennen.

Een uitkomstenruimte en kansmaat vormen samen een *kansmodel* voor het toevalsexperiment.

In het voorbeeld met de dobbelsteen is de uitkomstenruimte $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en de kansmaat voldoet aan

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \tfrac{1}{6},$$

dus de kans op elke uitkomst is $\frac{1}{6}$.

Voorbeeld: munten

Beschouw een munt met twee zijden. Een munt opgooien is willkeurig met

$$S = \{\text{kop}, \text{munt}\}$$

en $P(\{\text{kop}\}) = P(\{\text{munt}\}) = \frac{1}{2}$.

Stel nu dat we twee munten hebben, die we allebei opgooien. Als uitkomstenruimte voor dit experiment zouden we kunnen nemen

$$S = \{KK, MM, KM, MK\}.$$

Wat is de kans op de uitkomst KK? Onder de aanname dat de twee munten elkaar niet beïnvloeden, hebben beide kans $\frac{1}{2}$ op kop, dus de kans dat beide gelijk zijn aan kop is $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
Dit kunnen we toepassen op elke uitkomst en dus hebben ze allemaal kans $\frac{1}{4}$.

Onafhankelijkheid

Stel we gooien twee dobbelstenen D_1 en D_2, onafhankelijk van elkaar. We hebben

$$P(D_1 = 1 \text{ en } D_2 = 4) = P(D_1 = 1) \cdot P(D_2 = 4) = \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{36}.$$

Voor deze "productregel" moeten beide gebeurtenissen onafhankelijk zijn. Bijvoorbeeld:

$$P(D_1 = 1 \text{ en } D_1 + D_2 = 2) = P(D_1 = 1 \text{ en } D_2 = 1) = \tfrac{1}{36},$$

maar

$$P(D_1 = 1) \cdot P(D_1 + D_2 = 2) = \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{36} \neq \tfrac{1}{36}.$$

In het algemeen: als twee gebeurtenissen A en B onafhankelijk zijn, d.w.z. ze beïnvloeden elkaar op geen enkele manier, dan $P(A \text{ en } B) = P(A) \cdot P(B)$.

Regels voor kansen

Een aantal feiten over kans:

- De kans op een willekeurige gebeurtenis A is een getal tussen 0 en 1:

  $$0 \leq P(A) \leq 1.$$

  Gebeurtenissen met kans 0 treden nooit op, gebeurtenissen met kans 1 treden altijd op.
- Als S de uitkomstenruimte is, dan $P(S) = 1$: de gebeurtenis S betekent "één van de uitkomsten in de uitkomstenruimte treedt op", wat altijd het geval is.

  Voor het gooien met een dobbelsteen:

  $$P(S) = P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = 1.$$

Elkaar uitsluitende gebeurtenissen

Bekijk weer het experiment waar we met een dobbelsteen gooien. We berekenen

$$P(3 \text{ of } 5) = P(\{3,5\}) = \frac{2}{6} = P(3) + P(5)$$
$$P(\text{even of } 5) = P(\{2,4,5,6\}) = \frac{4}{6} = P(\text{even}) + P(5).$$

Deze somregel werkt alleen als de gebeurtenissen elkaar uitsluiten, dus geen uitkomsten gemeenschappelijk hebben:

$$P(\text{even of minder dan drie}) = P(\{1,2,4,6\}) = \frac{4}{6}$$
$$P(\text{even}) + P(\text{minder dan drie}) = P(\{2,4,6\}) + P(\{1,2\}) = \frac{5}{6}.$$

Regels voor kansen

- Als twee gebeurtenissen A en B onafhankelijk zijn, oftewel ze hebben geen invloed op elkaar, dan geldt

$$P(A \text{ en } B) = P(A) \cdot P(B).$$

- Als twee gebeurtenissen A en B elkaar uitsluiten, oftewel ze hebben geen uitkomsten gemeenschappelijk, dan hebben we

$$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B).$$

- Voor elke gebeurtenis A hebben we

$$P(A \text{ treedt niet op}) = 1 - P(A).$$

Bij de dobbelsteen:

$$P(\text{niet } 1) = 1 - P(1) = 1 - \tfrac{1}{6} = \tfrac{5}{6}.$$

Kansen berekenen

Vaak berekenen we kansen door te tellen. Voor de kans op een gebeurtenis A geldt in het geval van een experiment waarbij alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn:

$$P(A) = \frac{\text{aantal uitkomsten waarbij } A \text{ optreedt}}{\text{totaal aantal uitkomsten}}.$$

Voorbeeld: we gooien vier keer met een munt en noteren de vier uitkomsten.

- Uitkomsten zien eruit als $KMKK$: "kop, munt, kop, kop".
- De kans op zo'n uitkomst is $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^4}$.
- Er zijn $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$ mogelijke uitkomsten.

Als we nu bijvoorbeeld $P(\text{precies één keer kop})$ willen berekenen, tellen we de uitkomsten met precies één K. Dit zijn er vier: $KMMM$, $MKMM$, $MMKM$ en $MMMK$.
Dus $P(\text{precies één keer kop}) = \frac{4}{2^4} = 4$.

Voorbeeld (Opgave 9.5)

We gooien met twee dobbelstenen en bekijken de gebeurtenissen:

A : "$D_1 = 1$"	$(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)$	$P(A) = \frac{1}{6}$
B : "$D_1 = D_2$"	$(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)$	$P(B) = \frac{6}{36}$
C : "$D_1 = 1, D_2 = 3$"	$(1,3)$	$P(C) = \frac{1}{36}$
D : "$D_1 + D_2 = 3$"	$(1,2),(2,1)$	$P(D) = \frac{2}{36}$

paar	relatie	$P(X \text{ en } Y)$	$P(X \text{ of } Y)$
(A,B)	onafhankelijk	$P(A)P(B) = \frac{1}{36}$	$\frac{11}{36}$
(A,C)	-	$P(C) = \frac{1}{36}$	$P(A) = \frac{1}{6}$
(A,D)	-	$\frac{1}{36}$	$\frac{7}{36}$
(B,C)	elkaar uitsluitend	0	$P(B) + P(C) = \frac{7}{36}$
(B,D)	elkaar uitsluitend	0	$P(B) + P(D) = \frac{8}{36}$
(C,D)	elkaar uitsluitend	0	$P(C) + P(D) = \frac{3}{36}$