11 Oplossingen: toevalsvariabelen

Opgave 11.1. Nummer 2 kan het niet zijn, want hij eindigt niet in 1. Nummer 3 kan ook niet, want hij wordt 2 op het eind: verdelingsfuncties geven kansen en moeten tussen 0 en 1 zitten. Nummer 4 begint niet bij 0 en nummer 5 daalt.

Opgave 11.2.

a. $P(Y \leq \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

b. $P(Y > \frac{1}{2}) = 1 - F(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$

c. $P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}) = F(\frac{3}{4}) - P(\frac{1}{4}) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$

Opgave 11.3.

a. We moeten controleren dat de totale oppervlakte 1 is. Deze wordt gegeven door $0.5 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 1.5 = 0.25 + 0.75 = 1$.

b. $P(X \leq 0.5) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$.

c. $P(X > 0.75) = 1.5 \cdot 0.25 = 0.375$.

d. $P(0.25 \leq X \leq 0.75) = 0.5 * 0.25 + 1.5 * 0.25 = 0.125 + 0.375 = 0.5$.

Opgave 11.4.

a. $P(-2 \leq Y \leq -1)$

b. $P(0 \leq Y \leq 2)$

Opgave 11.5.

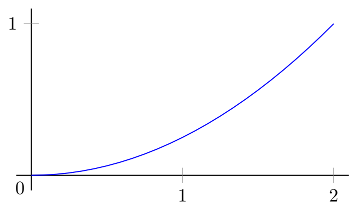
a. De tweede, derde en vijfde zijn dichtheden, de andere verdelingsfuncties. De tweede en vijfde kunnen duidelijk geen verdelingsfuncties zijn en de derde eindigt niet in 1.

b. De paren zijn $(1,5)$, $(2,6)$ en $(3,4)$.

Opgave 11.6. Deze verdelingsfunctie met 0 zijn in 0 en 1 in 1. Er geldt inderdaad $F(0) = 0$ (ongeacht wat c is), maar $F(1) = 2 - c$, dus c moet gelijk aan 1 zijn.

Opgave 11.7. Dit is de afgeleide: $F'(x) = \frac{3}{8}x^3$.

Opgave 11.8.



Dit is $\frac{1}{4}x^2$, immers de afgeleide hiervan is gelijk aan $\frac{1}{2}x$.

Opgave 11.9. Linksboven is $\mu = 0$, $\sigma = 3/2$ (top ligt in 0 en vrij uitgespreid). Rechtsboven is $\mu = 1$, $\sigma = 1$. Linksonder $\mu = 0$, $\sigma = 1$. Rechtsonder $\mu = 1$, $\sigma = 3/2$.

Opgave 11.10. De normale verdeling is symmetrisch om het gemiddelde, dus in het gemiddelde is de verdelingsfunctie gelijk aan $\frac{1}{2}$. In het plaatje gebeurt dit in 2, dus $\mu = 2$.

Opgave 11.11.

a. We verwachten evenveel nullen als enen, dus een gemiddelde van $\frac{1}{2}$.

b. Nu verwachten we 7 van de 10 keer een 1, dus het gemiddelde zal gelijk zijn aan 0.7. Voor p is dit gemiddelde gelijk aan p.

c. $ED = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3.5$

d. $ER = 0.8 \cdot 5 + 0.2 \cdot 1 = 4.2$

e. $EX = 0$. De verdeling is symmetrisch om 0: alle uitkomsten groter dan 0 zijn even waarschijnlijk als die kleiner dan 0. We verwachten dus gemiddeld 0 te krijgen. In het algemeen krijgen we bij een normale verdeling μ.

Opgave 11.12. Er geldt $E(3X) = 3EX = 15$. Als we gemiddeld 5 eruit krijgen en alles met 3 vermenigvuldigen, dan krijgen we gemiddeld 15. Zo ook $E(X+Y) = EX+EY$ en $E(aX+bY) = aEX + bEY$.