

## 9 Oplossingen: kansrekening

### Opgave 9.1.

- Dit zijn de mogelijkheden  $\{2, 4, 6\}$ . Dat is de helft van het totaal, dus de kans hierop is  $3/6 = 1/2$ .
- Dit zijn  $\{1, 2, 3, 4\}$ , dus de kans is  $4/6 = 2/3$ .

### Opgave 9.2.

- De uitkomsten zijn kop en munt, beide met kans  $1/2$ .
- De uitkomsten zijn kop/kop, munt/munt, kop/munt en munt/kop. Korter:  $\{KK, MM, KM, MK\}$ . De kans op iedere uitkomst is  $\frac{1}{4}$ .
- We hebben  $P(KK) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(\text{"eerste kop"}) \cdot P(\text{"tweede kop"})$ .
- Nee: als beide munten kop zijn, dan is de eerste dat zeker ook. We hebben dan ook  $P(\text{"eerste munt is kop"} \text{ en } \text{"beide munten zijn kop"}) = P(\text{"beide munten zijn kop"}) = \frac{1}{4}$ .

### Opgave 9.3.

- $P(D_1 = 1 \text{ en } D_2 = 4) = P(D_1 = 1) \cdot P(D_2 = 4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ .
- Ieder paar  $(i, j)$  met  $i$  en  $j$  getalen tussen 1 en 6 is een uitkomst. Dit geeft  $6 \cdot 6 = 36$  mogelijkheden. De kans op iedere uitkomst is  $\frac{1}{36}$ .
- Twee: dit geldt voor  $(1, 2)$  en  $(2, 1)$ .
- Dit geldt voor twee van de zesendertig, dus  $P(D_1 + D_2 = 3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ .
- Als  $D_1 + D_2 = 3$ , dan moet  $D_1$  gelijk zijn aan 1 of 2. Dus de gebeurtenis " $D_1 = 1$ " is veel waarschijnlijker dan als we niets weten. We hebben

$$P(D_1 = 1) \cdot P(D_1 + D_2 = 3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{108}$$
$$P(D_1 = 1 \text{ en } D_1 + D_2 = 3) = P(D_1 = 1 \text{ en } D_2 = 2) = \frac{1}{36}$$

### Opgave 9.4.

36. De elementen zijn paren als  $(1, 2)$  en  $(6, 6)$ .
- $D_1 = 1$  correspondeert met alle paren die op de eerste plek een 1 hebben:  $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\}$ . De gebeurtenis  $D_1 + D_2 = 3$  correspondeert met  $\{(1, 2), (2, 1)\}$ . " $D_1 = 1$  en  $D_1 + D_2 = 3$ " heeft maar 1 mogelijkheid:  $\{(1, 2)\}$ . Dit is precies het enige element dat in beide verzamelingen voorkomt.

### Opgave 9.5.

- $P(A) = \frac{1}{6}$ . De gebeurtenis  $B$  treedt op bij 6 paren:  $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)$  en  $(6, 6)$ . Dus  $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ . Verder geldt  $P(C) = \frac{1}{36}$  en  $P(D) = \frac{1}{18}$ .
- $A$  en  $B$  zijn onafhankelijk ( $D_1$  heeft geen invloed op  $D_2$ , en dus ook niet op het wel en niet gelijk zijn aan  $D_1$ ),  $A$  en  $C$  zijn geen van beide (als  $C$ , dan ook  $A$ ),  $A$  en  $D$  zijn geen van beide (als  $D$ , dan is  $A$  een stuk waarschijnlijker),  $B$  en  $C$  sluiten elkaar uit,  $B$  en  $D$  sluiten elkaar uit en  $C$  en  $D$  ook.

- c. Voor dingen die elkaar uitsluiten geldt  $P(X \text{ en } Y) = 0$  en  $P(X \text{ of } Y) = P(X) + P(Y)$ . Verder  $P(A \text{ en } B) = P(A) \cdot P(B)$ ,  $P(A \text{ en } C) = P(C)$ ,  $P(A \text{ of } C) = P(A)$ ,  $P(A \text{ en } D) = P(\{1, 2\}) = \frac{1}{36}$  en  $P(A \text{ of } D) = P(\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1)\}) = \frac{1}{7}$ .
- d. Deze zijn onafhankelijk, dus  $P(A \text{ en } E) = P(A)P(E) = \frac{1}{36}$ . Verder is  $P(A \text{ of } E) = P(\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1)\}) = \frac{11}{36}$ .

**Opgave 9.6.**

1.  $MKMM, KMKK$
2. Elke munt geeft twee mogelijkheden, totaal:  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
3. Allemaal even waarschijnlijk, dus  $\frac{1}{16}$
4. Vier:  $KMMM, MKMM, MMKM, MMMK$
5. Volgens de regel:  $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$
6. Er zijn zes mogelijkheden met twee keer kop:  $KKMM, KMKM, KMMK, MKKM, MKMK, MMKK$ . Dit geeft een kans van  $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$
7. Het worden nu rijtjes van  $n$  keer een  $K$  of  $M$ , dit zijn er  $2^n$ . De kans op 1 is dus  $1/2^n$ . Er zijn er  $n$  met 1 kop (1 voor iedere positie), dus de kans op 1 kop is  $n/2^n$ .

**Opgave 9.7.**

1.  $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
2. Ze zijn onafhankelijk, dus:  $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{2}{3}$  (16 keer). Dit geeft  $\frac{2^{16}}{3^{16}}$ .
3. Hetzelfde, maar dan met  $\frac{1}{3}$ :  $(\frac{1}{3})^{16} = \frac{1}{3^{16}}$ .
4. Dit is het tegenovergestelde van "geen van allen blauwe ogen":  $1 - \frac{1}{3^{16}}$ .

**Opgave 9.8.**

1. De kansen moeten optellen tot 1, dus deze kans is  $3/7$ .
2. We hebben  $P(\text{groen of blauw}) = P(\text{groen}) + P(\text{blauw}) = 3/7$ .
3. De experimenten zijn onafhankelijk. Voor het gemak noemen we ze  $K_1$  en  $K_2$ . Er geldt  $P(K_1 = g, K_2 = g) = P(K_1 = g) \cdot P(K_2 = g) = \frac{4}{49}$ .
4. De kans dat we bij 1 poging geen groene kikker pakken is  $1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$ . De kans dat we twee keer geen groene kikker pakken is dus  $\frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{25}{49}$ .
5. Dit is het tegenovergestelde van geen groene kikker pakken:  $1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49}$ .

**Opgave 9.9.**

1. Zie opgave 4.
2. De mogelijk uitkomsten zijn  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ . Om de kansen te bepalen moeten we tellen hoeveel van de 36 paren iedere uitkomst opleveren. Bijvoorbeeld voor 5 zijn er vier mogelijkheden ( $2 + 3, 3 + 2, 1 + 4$  en  $4 + 1$ ), dus de kans op 5 is  $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ . Een tabel van sommen helpt:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Door het aantal keren te tellen dat ieder getal in de tabel voorkomt vinden we

getal	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
kans	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

- {1-Jan, 2-Jan, ..., 30-Dec, 31-Dec}. Kans op iedere uitkomst is  $\frac{1}{365}$ .
- {1, 2, 3, 4, 5, ...}. De kans dat we de eerste keer kop krijgen is  $\frac{1}{2}$ . De kans dat we eerst munt, dan kop krijgen, is  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ . De kans op twee keer munt, dan kop is  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ . Etcetera: de kans op  $n - 1$  munt, dan kop, is  $(\frac{1}{2})^n$ .

**Opgave 9.10.** De kans dat we nooit kop krijgen is  $(\frac{3}{4})^{10}$ . De kans op minstens 1 keer kop is dus  $1 - (\frac{3}{4})^{10}$ .

**Opgave 9.11.**

- "A of B" = {1, 2, 5, 6, 7}, "A en B" = {5}.
- Alles wat niet in A zit: {3, 4, 6, 7}.
- "A of B" is A en B samen, "A en B" de doorsnede: het stuk waar ze elkaar overlappen.
- Het donker gearceerde gebied is het stuk van A dat niet in B ligt, hier {1, 2}.