Uitwerkingen tweede proeftentamen Wiskunde A

Opgave 1

(a) Om de sijpunten te bepalen tussen f en g in het gegeven domein (dat is $[0,1]$) moeten we de twee functies aan elkaar gelijk stellen:

$$f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - 4x = 4x - 3 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - 8x + 3 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{2 \cdot 4} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{8} = \frac{8 \pm 4}{8} = 1 \pm \frac{1}{2};$$

en omdat we tussen 0 en 1 zitten, de oplossing $x = \frac{3}{2}$ hoeven we niet, dus er is maar een snijpunt tussen f en g, dat is in $x = \frac{1}{2}$.

(b) In het plaatje zien we dat g boven f ligt rechts van het snijpunt, dus voor $x \geq \frac{1}{2}$.

Opgave 2

(a) **Nulpunten**

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 + 3x^2 - 24x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x^2 + 3x - 24) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{of} \quad x^2 + 3x - 24 = 0.$$

De tweede vergelijking in de laatste regel, gaan we oplssen met de *abc*-formule:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot -24}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{105}}{2}$$

Dus als nulpunten hebben we $x = 0$ of $x = \frac{-3 \pm \sqrt{105}}{2}$.

Toppen

$$0 = f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 \quad \Rightarrow \quad 0 = x^2 + 2x - 8 \quad \Rightarrow \quad 0 = (x+4)(x-2)$$
$$\Rightarrow \quad x = -4 \quad \text{of} \quad x = 2$$

Verder

$$f''(x) = 6x - 6$$

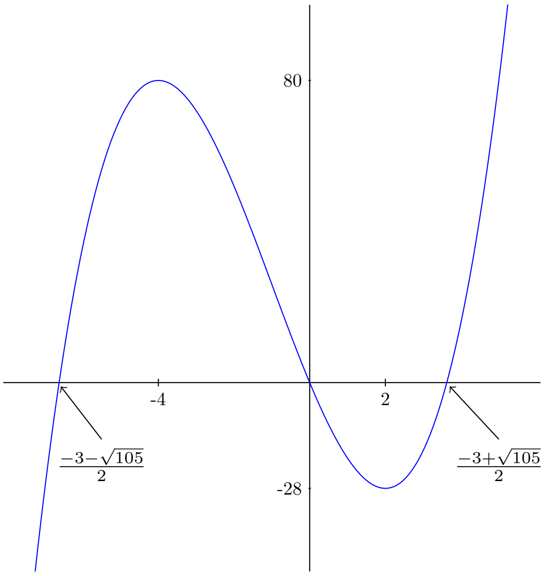
dus invullen:

$$f''(-4) = 6 \cdot -4 + 6 = -18 \quad \text{en} \quad f''(2) = 6 \cdot 2 + 6 = 18$$

en

$$f(-4) = 80 \quad \text{en} \quad f(2) = -28$$

Dus we hebben een maximum in $(-4, 80)$ en een minimum in $(2, -28)$. Het domein van deze functie is $\mathbb{R}$ en het bereik ook.



(b) **Nulpunten**

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 5 = 0,$$

maar de discriminant $D = 16 - 20 = -4$ is negatief, dus deze functie heeft geen nulpunten.

Toppen

$$0 = f'(x) = \frac{(x-2)(2x-4) - 1(x^2 - 4x + 5)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-3)(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad \text{of} \quad x = 3.$$

Verder:

$$f''(x) \quad = \quad \frac{(x-2)^2(2x-4) - (x^2 - 4x + 3)(2(x-2))}{(x-2)^4} \quad = \quad \frac{2(x-2)}{(x-2)^4} \quad = \quad \frac{2}{(x-2)^3}.$$

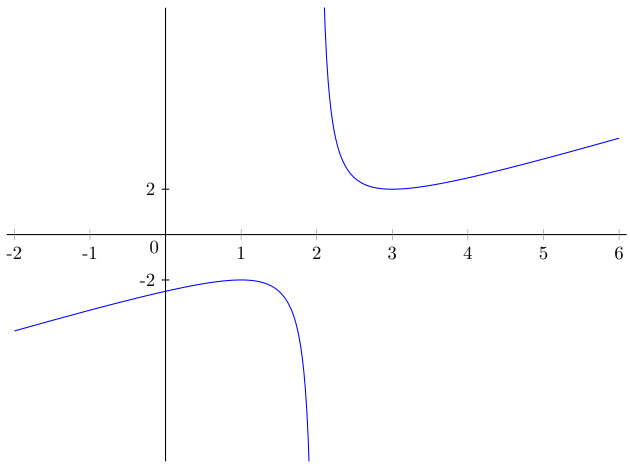
dus invullen:

$$f''(1) = \frac{2}{(-1)^3} = -2 \quad \text{en} \quad f''(3) = \frac{2}{1^3} = 2$$

en:

$$f(1) = \frac{1 - 4 + 5}{-1} = -2 \quad \text{en} \quad f(3) = \frac{9 - 12 + 5}{1} = 2$$

Dus we hebben een maximum in $(1, -2)$ en een minimum in $(3, 2)$. Het domein van $f(x)$ is $x \neq 2$, want we hebben een $x - 2$ in de noemer, en het bereik is $y \geq 2$ of $y \leq -2$.



Opgave 3

(a)

$$x^2(x+2) = 0$$

Een van de twee factoren y^2 en $(y-2)$ moet gelijk zijn aan nul en dus zien we dat $y = 0$ of $y = -2$.

(b)

$$x^2(x+2) < 0$$

We merken op dat dit dezelfde vergelijking is als in onderdeel (a), maar nu met een ongelijk teken. Om te bepalen wanneer $x^2(x+2)$ kleiner is dan nul, moeten we het tekenverloop bepalen. Dit doen we door $x^2(x+2)$ uit te rekenen voor een getal $x < -2$, een getal $-2 < x < 0$ en een getal $x > 0$. We vinden $(-3)^2(-3+2) = -9 < 0$, $(-1)^2(-1+2) = 1 > 0$ en $1^2(1+2) = 3 > 0$. We zien dus dat de ongelijkheid geldt voor $x < -2$

(c) We nemen de logaritme: $x + 1 = {}^2\log 30$. Dit geeft $x = {}^2\log 30 - 1$.

(d) Dit is hetzelfde als $(x-5)^{\frac{1}{3}} = 2$. Machten nemen geeft $x - 5 = 2^{\frac{1}{1/3}}$, dus $x - 5 = 2^3 = 8$, oftewel $x = 13$.

(e) We halen een factor 2^x buiten haakjes: $2^x(1+x) = 0$. Dit geeft $2^x = 0$ of $1 + x = 0$. De eerste heeft geen oplossingen, de tweede geeft $x = -1$.

(f) Dit staat al buiten haakjes, dus we krijgen ${}^3\log x = 0$ of $x+1 = 0$. De eerste geeft $x = 3^0 = 1$, de tweede $x = -1$. Maar: $x = -1$ kunnen we niet invullen in de oorspronkelijke vergelijking door de logaritme. We hebben dus 1 oplossing: $x = 1$.

(g) We passen de productregel toe:

$$\left[x\sqrt{5-3x^2}\right]' = [x]'\sqrt{5-3x^2} + x[\sqrt{5-3x^2}]'.$$

De afgeleide van $g(x) = \sqrt{5-3x^2} = (5-3x^2)^{\frac{1}{2}}$ bepalen we met de kettingregel:

$$\begin{aligned} g(u) &= u^{\frac{1}{2}} & \qquad u &= 5-3x^2 \\ g'(u) &= \tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} & \qquad u' &= -6x \end{aligned}$$

$$g'(x) = \tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot (-6x) = -3xu^{-\frac{1}{2}} = -3x(5-3x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

We vullen dit weer in:

$$\left[x\sqrt{5-3x^2}\right]' = \sqrt{5-3x^2} + x \cdot \left(-3x(5-3x^2)^{-\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{5-3x^2} - 3x^2(5-3x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Opgave 4

(a) Het totaal aantal manieren om 2 ballen te pakken is $7 \cdot 6 = 42$. Er zijn 5 groene ballen, dus er zijn $5 \cdot 4 = 20$ manieren om er 2 te pakken. De gravraagde kans is dus $\frac{20}{42} = \frac{10}{21}$.

(b) We hebben $P(\text{twee dezelfde ballen}) = P(\text{twee groene ballen}) + P(\text{twee blauwe ballen})$. De eerste hebben we al berekend, de tweede is gelijk aan $\frac{2}{42} = \frac{1}{21}$ ($2 \cdot 1 = 2$ manieren om 2 blauwe ballen te pakken). Dus $P(\text{twee dezelfde ballen}) = \frac{10}{21} + \frac{1}{21} = \frac{11}{21}$.

(c) De kans dat we 2 groene ballen pakken is $\frac{10}{21}$. De kans dat dit drie keer gebeurt is dus $\left(\frac{10}{21}\right)^3$.

(d) De variabele $X =$"het aantal keer dat we 2 groene ballen pakken" is binomiaal verdeeld met $n = 3$ en $p = \frac{10}{21}$. De gevraagde kans is

$$P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{10}{21}\right)^2\left(\frac{11}{21}\right)^1 = 3 \cdot \left(\frac{10}{21}\right) \cdot \frac{11}{21}.$$

Opgave 5

(a) Dit is de locatie van de top, dus 1.

(b) Y: de dichtheid is platter, dus de verdeling is meer uitgespreid.

(c) $P(X > \frac{3}{2})$.

(d) 0.5: de dichtheid is symmetrisch.