Wiskunde logica

Werkcollege 11

Jolien Oomens

2 mei 2017

Opgave 1

(a) Geef een $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ die geen "upset" is.
(b) Geef een $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ die wel een upset is maar geen filter.
(c) Geef een filter F die geen ultrafilter is.

(a) Neem $S = \emptyset$.

(b) Kies verschillende $x, y \in X$ en definieer

$$S = \{A \subseteq X : x \in A \vee y \in A\}.$$

Dan geldt niet dat $A, B \in S \implies A \cap B \in S$.

(c) De co-eindige filter $F = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ is eindig}\}$. Voor bijvoorbeeld $X = \mathbb{R}$ en $A = \mathbb{R}_{\geq 0}$ geldt $A \notin F$ en $X \setminus A \notin F$.

Opgave 2(a)

Bewijs dat een niet-principieel ultrafilter op $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ geen eindige verzameling bevat.

Zij F een niet-principieel ultrafilter van $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ en stel dat een eindige verzameling $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \in F$. Definieer $B_1 = X \setminus \{a_1\}$. We weten dat $B_1 \in F$, want $\{a_1\} \notin F$ omdat F niet principieel is. Nu zien we dat

$$X \setminus A = B_1 \cap \cdots \cap B_n \in F$$

dus ook $(X \setminus A) \cap A = \emptyset \in F$ en dat geeft een tegenspraak met de aanname dat $F \neq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Opgave 2(b)

Bewijs dat voor een filter F en een $U \subseteq \mathbb{N}$ de verzameling $F' = \{V \subseteq \mathbb{N} : A \cap U \subseteq V \text{ voor een } A \in F\}$ een filter is.

Een *filter* in $\mathbb{N}$ is een collectie $F \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zodat

1. $A \in F$ en $B \in F \implies A \cap B \in F$
2. $A \in F$ en $A \subseteq B \implies B \in F$.

Neem $C, D \in F'$. Dan zijn er $A, B \in F$ zodat $A \cap U \subseteq C$ en $B \cap U \subseteq D$. Nu zien we dat

$$(A \cap B) \cap U \subseteq C \cap D,$$

dus $C \cap D \in F'$.
Stel nu dat $C \in F'$ en $C \subseteq E$. Er is een $A \in F$ zodat $A \cap U \subseteq C \subseteq E$, dus $E \in F'$.
Het is duidelijk de kleinste extensie.

Opgave 2(c)

Bewijs dat elke filter $F \neq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ uitgebreid kan worden naar een ultrafilter.

Zij $F \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ een filter. Bekijk de poset

$$V = \{F \subseteq G \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{N}) : G \text{ is een filter}\}.$$

Zij $K \subseteq V$ een ketting. Dan is de vereniging $H = \bigcup_{G \in K} G$ opnieuw een filter. Omdat $\emptyset \notin F$ geldt ook $\emptyset \notin H$, dus $H \neq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Deze H is dus een bovengrens in V. Er is dus een maximaal element M volgens Zorns lemma. Stel dat $A \notin M$. Er geldt

$$M \subsetneq M \cup \{A\} \subseteq \{V \subseteq \mathbb{N} : B \cap A \subseteq V \text{ voor een } B \in M\} =: M'$$

dus omdat M maximaal is moet $M' = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Er is dus een $B \in M$ zodat $B \cap A = \emptyset$, dus $\mathbb{N} \setminus A \subseteq B \in M$. Dit laat zien dat voor alle $A \subseteq \mathbb{N}$ we $A \in M$ of $\mathbb{N} \setminus A \in M$ hebben, dus M is een ultrafilter.

Opgave 2

(d) Bewijs dat $\{A \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus A \text{ is eindig}\}$ een filter is.
(e) Bewijs dat er een niet-principieel ultrafilter bestaat op $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$

(d) Analoog aan (b).

(e) We breiden het filter uit (d) uit naar een ultrafilter F. We willen nu bewijzen dat deze F niet-principieel is. Merk op dat er geen eindige verzamelingen in F kunnen zitten, dus in het bijzonder kunnen er ook geen singletons $\{x\}$ in zitten. Dit laat zien dat F niet van de vorm $\{A \subseteq \mathbb{N} : x \in A\}$ is.

Opgave 3

Zij $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ S-structuren met $S = \{R\}$. Zij F_n het principiele ultrafilter van $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ gegenereerd door $n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat $\left(\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)/F_n \cong A_n$.

We hebben

$$F_n = \{A \subseteq \mathbb{N} : n \in A\},$$

dus

$$\begin{aligned} a \sim b &\iff \{i \in \mathbb{N} : a(i) = b(i)\} \in F_n \\ &\iff n \in \{i \in \mathbb{N} : a(i) = b(i)\} \iff a(n) = b(n). \end{aligned}$$

De afbeelding $f \colon \left(\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)/F_n \to A_n$ gegeven door $f(a) = a(n)$ is dus een isomorfisme.

Opgave 4

(a) Bewijs dat de klasse van lineaire ordes gesloten is onder ultraproducten.
(b) Bewijs dat de klasse van eindige posets niet elementair is.

(a) We weten dat er een φ is die precies weergeeft dat een structuur een lineaire orde is. Omdat elke $A_i \models \varphi$ geldt ook $\prod_{i \in I} A_i/\!\sim\, \models \varphi$ volgens Łoś' stelling.

(b) Stel van wel, dan moet de eigenschap behouden zijn onder het nemen van een ultraproduct. Neem $A_i = \{1, \ldots, i\}$ en zij F een ultrafilter die de co-eindige filter omvat. Nu is

$$(\{1\} \times \{1,2\} \times \{1,2,3\} \times \ldots)/F$$

oneindig groot, want de rijtjes $a^n(i) = \min(i, n)$ zijn allemaal verschillend in het ultraproduct:

$$a^1 = 1,1,1,1,1,1,1,\ldots$$
$$a^2 = 1,2,2,2,2,2,2,\ldots$$
$$a^3 = 1,2,3,3,3,3,3,\ldots$$