Wiskunde logica

Werkcollege 12

Jolien Oomens

12 mei 2017

Opgave 1

(a) Bewijs dat de klasse van lineaire ordes gesloten is onder ultraproducten.
(b) Bewijs dat de klasse van eindige posets niet elementair is.

(a) We weten dat er een φ is die precies weergeeft dat een structuur een lineaire orde is. Omdat elke $A_i \models \varphi$ geldt ook $\prod_{i \in I} A_i/\sim \models \varphi$ volgens de stelling van Łoś .

(b) Stel van wel, dan moet de eigenschap behouden zijn onder het nemen van een ultraproduct. Neem $A_i = \{1, \ldots, i\}$ en zij F een ultrafilter die de co-eindige filter omvat. Nu is

$$(\{1\} \times \{1,2\} \times \{1,2,3\} \times \ldots)/F$$

oneindig groot, want de rijtjes $a^n(i) = \min(i, n)$ zijn allemaal verschillend in het ultraproduct:

$$a^1 = 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$$
$$a^2 = 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots$$
$$a^3 = 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, \ldots$$

Opgave 2

Geef een definitie in Φ_0 van (a) x is een n-aire functie van y naar z (b) $x = y \cup z$

Op bladzijde 104 zijn de axioma's te vinden.

(a) Informeel:

$$Mx \wedge My \wedge Mz \wedge (x \subset y^n \times z) \wedge \forall y_1 \ldots \forall y_n \exists! z((y_1, \ldots, y_n, z) \in x).$$

(b) Een mogelijke definitie is

$$Mx \wedge My \wedge Mz \wedge \forall w\,(w \in x \iff (w \in y \vee w \in z)).$$

Opgave 3

Bewijs in ZFC dat er een verzameling bestaat zonder elementen.

Het axioma INF geeft het bestaan van een oneindige verzameling x. Nu kunnen we met SEP een selectie maken: definieer $\varphi(z) = \neg z \equiv z$. Dit kan voor geen enkele z waar zijn, dus SEP verandert x in de lege verzameling.

Opgave 4

Bewijs dat het keuzeaxioma equivalent is aan het bestaan van keuzefuncties voor niet-lege verzamelingen.

Neem het keuzeaxioma aan. Zij $A = \{B_i : i \in I\}$ een verzameling van niet-lege verzamelingen. We weten niet of de B_i disjunct zijn, dus we mogen het keuzeaxioma niet direct toepassen. Dankzij POW weten we dat $\mathcal{P}(A \times \bigcup A)$ weer een verzameling is. Definieer nu $\varphi\colon A \to \mathcal{P}(A \times \bigcup A)$ door $\varphi(B_i) = \{(B_i, y) : y \in B_i\}$. Nu bestaat het beeld $\varphi(A) = \{\{(B_i, y) : y \in B_i\} : i \in I\}$ uit disjuncte verzamelingen (REP) want alle B_i zijn verschillend. Het keuzeaxioma geeft een verzameling

$$C = \{\{(B_i, y_i)\} : i \in I\}$$

dus volgens REP is ook $\{y_i : i \in I\}$ een verzameling. De gezochte keuzefunctie is $f(B_i) := y_i$.

Opgave 4

Bewijs dat het keuzeaxioma equivalent is aan het bestaan van keuzefuncties voor niet-lege verzamelingen.

Neem nu het bestaan van keuzefuncties aan en zij $A = \{B_i : i \in I\}$ een verzameling van disjunctie niet-lege verzameling. Zij $f : A \to \bigcup A$ een keuzefunctie. Volgens REP is het beeld van f een verzameling en dit is precies de gezochte verzameling met één element uit elke B_i. Dit bewijst het keuzeaxioma.