



Wiskunde logica

Werkcollege 1

Jolien Oomens

10 februari 2017

Opgave 3

Zij $f: X \rightarrow X$ en bekijk $R_f \subseteq X^2$ gegeven door $R_f ab \iff f(a) = b$.

- (a) Onder welke aannames is een relatie R te schrijven als R_f ?
- (b) Wat weet je over f als R_f reflexief is?

- (a) Een functie is *welgedefinieerd* als er voor elke x -waarde een unieke $f(x)$ bestaat. Dit betekent precies dat

$$\forall x \exists y (Rxy \wedge \forall z (Rxz \rightarrow y = z)).$$

- (b) Als $R_f a a$ dan hebben we $f(a) = a$. Omdat dit voor alle $a \in X$ geldt zien we dat $f = \text{id}_X$.



Opgave 2

Geef een voorbeeld van een verzameling en een relatie die

- (a) reflexief maar niet transitief is;
- (b) reflexief en transitief maar niet antisymmetrisch is;
- (c) reflexief, transitief en symmetrisch maar niet totaal is.

- (a) Neem $X = \mathbb{R}$ en $Rxy \iff |x - y| < 1$.
Er geldt $0 \sim \frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2} \sim 1$, maar $0 \not\sim 1$.

- (b) Neem $X = \mathbb{R}$ en $R = X \times X$.

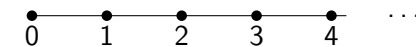
- (c) Neem $X = \mathbb{R}$ en $Rxy \iff \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$.
We hebben Rxy dan en slechts dan als er een $n \in \mathbb{Z}$ is zodat $x, y \in [n, n + 1)$, dus bijvoorbeeld $0 \not\sim 1$.



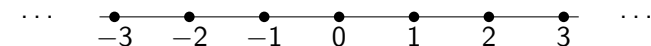
Opgave 4

Geef een voorbeeld van een poset (a) met een minimum; (b) zonder minimaal element; (c) met een minimaal element én zonder minimum.

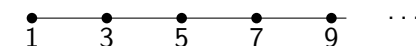
- (a) De geordende verzameling (\mathbb{N}, \leq) heeft 0 als minimum, want $0 \leq n$ voor alle n .



- (b) De geordende verzameling (\mathbb{Z}, \leq) heeft geen minimaal element, want voor alle n is er een $m < n$.



- (c) Bekijk \mathbb{N} met $Rxy \iff (x \leq y) \wedge \exists k (y - x = 2k)$.



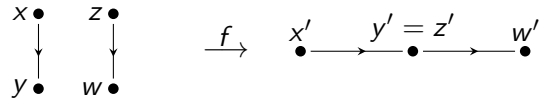
De minimale elementen zijn 0 en 1, maar er is geen minimum.



Opgave 5

We noemen $f: (X, R) \rightarrow (X', R')$ een homomorfisme als Rab impliceert dat ook $R'f(a)f(b)$. Neem aan dat f surjectief is. (a) Als R reflexief is, is R' dat dan ook? (b) Herhaal voor transitiviteit (c) Herhaal voor irreflexiviteit.

- (a) Neem $x' \in X'$. Vanwege de surjectiviteit van f bestaat er een x zodat $f(x) = x'$. Omdat R reflexief is geldt Rxx , dus er geldt ook $R'f(x)f(x)$, oftewel $R'x'x'$. Dit bewijst dat R' reflexief is.
- (b) Stel dat $x', y', z' \in X'$ zodat $R'x'y'$ en $R'y'z'$. Er zijn x, y, z zodat $f(x) = x'$, $f(y) = y'$ en $f(z) = z'$. En nu?



Figuur: Een tegenvoorbeeld: (X', R') is niet transitief.

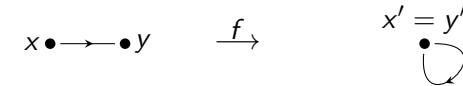
De claim is dus onwaar.



Opgave 5

We noemen $f: (X, R) \rightarrow (X', R')$ een homomorfisme als Rab impliceert dat ook $R'f(a)f(b)$. Neem aan dat f surjectief is. (a) Als R reflexief is, is R' dat dan ook? (b) Herhaal voor transitiviteit (c) Herhaal voor irreflexiviteit.

- (c) Stel dat $x' \in X'$ en stel dat $R'x'x'$. Er is een $x \in X$ met $f(x) = x'$. En nu?



Figuur: Een tegenvoorbeeld: (X', R') is niet irreflexief.

De claim is dus onjuist.

