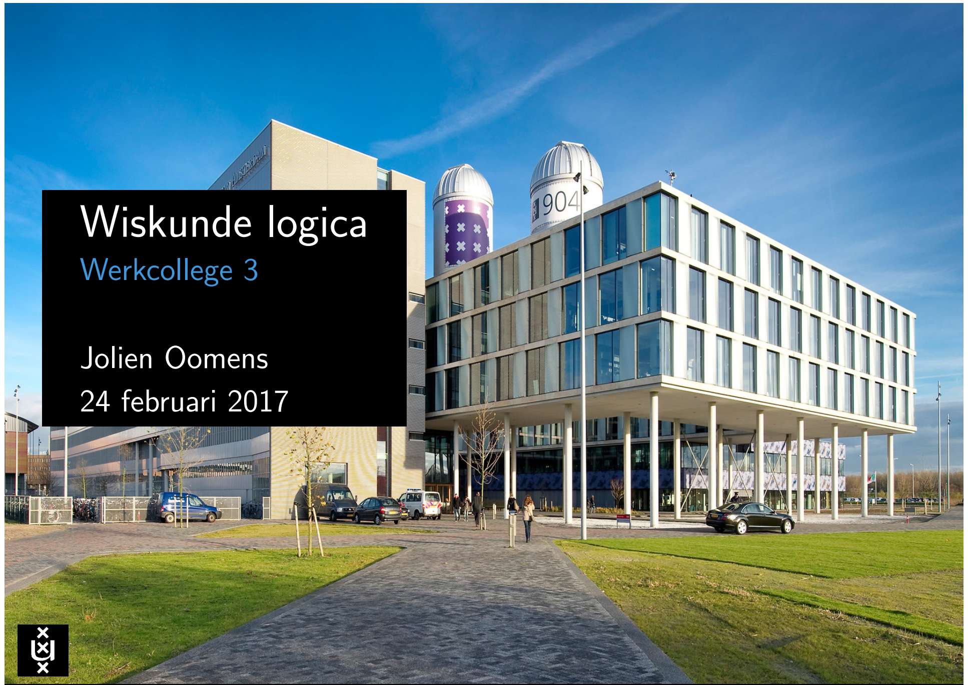

Wiskunde logica

Werkcollege 3

Jolien Oomens

24 februari 2017

Opgave 3(a)

Bewijs dat de ontkenning van een universele uitspraak logisch equivalent is aan een existentiële uitspraak en dat de ontkenning van een existentiële uitspraak equivalent is aan een universele uitspraak.

We bewijzen dit met inductie naar de opbouw van de universele formule.

- Als φ geen kwantoren heeft, geldt hetzelfde voor $\neg\varphi$ waardoor dit een existentiële formule is.
- Stel dat φ en ψ universeel zijn. Dan zijn er existentiële formules $\tilde{\varphi}$ en $\tilde{\psi}$ zodat $\neg\varphi \mathrel{=\!\!|\!\models} \tilde{\varphi}$ en $\neg\psi \mathrel{=\!\!|\!\models} \tilde{\psi}$. Nu zien we dat $\neg(\varphi \vee \psi) \mathrel{=\!\!|\!\models} \tilde{\varphi} \wedge \tilde{\psi}$. (Bewijs dat dit existentieel is!) (Evenzo "$\wedge$").
- Stel dat φ universeel is. Er geldt $\neg\forall x\varphi \mathrel{=\!\!|\!\models} \exists x\neg\varphi$. Volgens de IH is er een existentiële $\tilde{\varphi}$ die logisch equivalent is aan $\neg\varphi$. Dit impliceert dat $\exists x\tilde{\varphi}$ ook existentieel is.

De tweede uitspraak is op eenzelfde manier te bewijzen.

Opgave 3(b)

Stel dat $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ en dat φ een existentiële formule is. Laat zien dat $\mathfrak{A} \models \varphi$ impliceert dat $\mathfrak{B} \models \varphi$.

Gevolg 5.8

Als $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ en φ een universele formule is, dan impliceert $\mathfrak{B} \models \varphi$ dat $\mathfrak{A} \models \varphi$.

We kunnen nu onderdeel (a) en dit gevolg combineren. Zij φ een existentiële formule en $\tilde{\varphi}$ een universele formule die equivalent is aan $\neg\varphi$. We hebben

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \varphi &\iff \text{niet } \mathfrak{A} \models \neg\varphi \\ &\iff \text{niet } \mathfrak{A} \models \tilde{\varphi} \\ &\implies \text{niet } \mathfrak{B} \models \tilde{\varphi} \\ &\iff \text{niet } \mathfrak{B} \models \neg\varphi \\ &\iff \mathfrak{B} \models \varphi. \end{aligned}$$

Opgave 4

Zij Φ_{pos} de axioma's van een poset. Laat zien dat er een S_{pos}-formule φ bestaat zodat $\Phi_{\text{pos}} \not\models \varphi$ maar ook $\Phi_{\text{pos}} \not\models \neg\varphi$.

Dit zegt dat φ een formule is die voor sommige posets wel waar is en voor sommige niet. Een voorbeeld is de formule die aangeeft dat een verzameling totaal geordend is:

$$\varphi = \forall x \forall y \, (Rxy \vee Ryx) \, .$$

Opgave 5(a)

Bewijs dat voor elke positieve S-formule er een S-interpretatie bestaat die de formule waar maakt.

Er is een S-interpretatie die *alle* positieve formules φ waar maakt. Kies $A = \{a\}$ en zij $\mathfrak{I} = (A, \mathfrak{a}, \beta)$ een interpretatie zodat alle relatiesymbolen met ariteit n worden afgebeeld op $R_n = A^n$. Omdat A maar één element heeft wordt elke S-term door $\mathfrak{I}$ afgebeeld op a. We bewijzen nu met inductie naar de complexiteit van φ dat $\mathfrak{I} \vDash \varphi$.

$$
\begin{array}{lr}
\mathfrak{I} \vDash t_1 \equiv t_2 & \text{want } \mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2) = a \\
\mathfrak{I} \vDash Rt_1 \dots t_n & \text{want } R_n a \dots a \\
\mathfrak{I} \vDash \varphi \wedge \psi & \iff \mathfrak{I} \vDash \varphi \text{ en } \mathfrak{I} \vDash \psi \text{ (IH)} \\
\mathfrak{I} \vDash \varphi \vee \psi & \Longleftarrow \mathfrak{I} \vDash \varphi \text{ en } \mathfrak{I} \vDash \psi \text{ (IH)} \\
\mathfrak{I} \vDash \forall x\varphi & \iff \mathfrak{I}\frac{b}{x} \vDash \varphi \text{ voor alle } b \in A \iff \mathfrak{I} \vDash \varphi \text{ (IH)} \\
\mathfrak{I} \vDash \exists x\varphi & \iff \mathfrak{I}\frac{b}{x} \vDash \varphi \text{ voor een } b \in A \iff \mathfrak{I} \vDash \varphi \text{ (IH)}
\end{array}
$$

Opgave 5(b)

Geef een formule die deze structuur niet vervult.

Een eenvoudig voorbeeld is

$$\exists x \exists y\, (\neg x \equiv y)\,.$$

Opgave 6

(a) Bewijs dat $\forall x\varphi \vDash \exists x\varphi$. Wat als A leeg zou zijn? (b) Geldt $\exists x\varphi \vDash \forall x\varphi$? (c) Bewijs dat $\exists x\forall y\varphi \vDash \forall y\exists x\varphi$. (d) Bewijs dat "$\dashv$" niet waar is.

(a) Zij $\mathfrak{I} = (A, \mathfrak{a}, \beta)$ een interpretatie en stel dat $\mathfrak{I} \vDash \forall x\varphi$. Dit betekent dat voor alle $a \in A$ er geldt dat $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \varphi$. Omdat A niet leeg is, bestaat er dus een $a \in A$ zodat $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \varphi$, oftewel $\mathfrak{I} \vDash \exists x\varphi$.

(b) Nee. Bekijk bijvoorbeeld $(\mathbb{N}, \leqslant)$ met $\varphi = x \equiv 0$.

(c) Stel dat $\mathfrak{I} \vDash \exists x\forall y\varphi$. Dan bestaat er een $a \in A$ zodat voor alle $b \in A$ geldt dat $\mathfrak{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y} \vDash \varphi$. In het bijzonder hebben we dan voor elke $b \in B$ een $a \in A$ zodat $\mathfrak{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y} \vDash \varphi$, oftewel $\mathfrak{I}\frac{b}{y}\frac{a}{x} \vDash \varphi$, dus $\mathfrak{I} \vDash \forall y\exists x\varphi$.

(d) Bekijk $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ met $\varphi = x \leqslant y$.

Opgave 7(a)

Bewijs dat $\neg\forall x\varphi \dashv\vDash \exists x\neg\varphi$.

Zij $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ een interpretatie. Er geldt

$$
\begin{array}{rc}
\mathfrak{I} \vDash \neg\forall x\varphi & \iff \\
\text{niet } \mathfrak{I} \vDash \forall x & \iff \\
\text{niet voor alle } a \in A \text{ geldt } \mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \varphi & \iff \\
\text{er is een } a \in A \text{ zodat niet } \mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \varphi & \iff \\
\text{er is een } a \in A \text{ zodat } \mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \neg\varphi & \iff \\
\mathfrak{I} \vDash \exists x\neg\varphi, &
\end{array}
$$

zoals gewenst.

Opgave 7(e)

Als $x \notin \text{free}(x)$, dan geldt $\forall x\varphi \dashv\models \varphi$.

Zij $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ een interpretatie en stel dat x geen vrije variabele van φ is. Er geldt

$$\mathfrak{I} \models \forall x\varphi \iff \text{voor alle } a \in A \text{ geldt } \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi \iff \mathfrak{I} \models \varphi,$$

waar we in de laatste stap het Coincidence Lemma (4.6) gebruiken.

Opgave 8

(a) Geef een formule φ die weergeeft dat een structuur een lineaire ordening is met een kleinste element en waarvan elk punt een directe opvolger heeft.

Totale ordening:	$\forall x \forall y\, (Rxy \vee Ryx)$	$= \varphi_1$
Transitiviteit:	$\forall x \forall y \forall z\, ((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz)$	$= \varphi_2$
Antisymmetrie:	$\forall x \forall y\, ((Rxy \wedge Ryx) \to x \equiv y)$	$= \varphi_3$
Kleinste element:	$\exists x \forall y\, (Rxy)$	$= \varphi_4$
Directe opvolger:	$\forall x \exists y\, (Rxy \wedge \forall z\, (Rxz \to Ryz))$	$= \varphi_5$

Nu definiëren we $\varphi := \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4 \wedge \varphi_5$.

Opgave 8

(b) Laat zien dat $(\mathbb{N}, \leqslant) \models \varphi$.
(c) Vind een S-structuur $\mathfrak{A}$ zodat $\mathfrak{A} \models \varphi$ die niet isomorf is aan $(\mathbb{N}, \leqslant)$.

(b) De verzameling $\mathbb{N}$ met de relatie $\leqslant$ is inderdaad totaal geordend, $\leqslant$ is transitief en antisymmetrisch. Verder is 0 het kleinste element en heeft elk getal een directe opvolger.

(c) Bekijk de volgende structuur:

$$0 \to 1 \to 2 \to 3 \quad \cdots \quad \tilde{0} \to \tilde{1} \to \tilde{2} \quad \cdots$$

Een ander voorbeeld is:

$$0 \to 1 \to 2 \to 3 \quad \cdots \quad \cdots \quad -\tilde{1} \to \tilde{0} \to \tilde{1} \quad \cdots$$