Wiskunde logica

Werkcollege 4

Jolien Oomens

3 maart 2017

Opgave 2

Als $x \notin \mathrm{var}(t)$ dan geldt er $\models \varphi\frac{t}{x} \leftrightarrow \forall x(x \equiv t \rightarrow \varphi)$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{I} \models \forall x(x \equiv t \rightarrow \varphi) &\iff \text{voor alle } a \in A,\ \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models (x \equiv t \rightarrow \varphi) \\
&\iff \text{voor alle } a \in A,\ \text{als } \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models x \equiv t \text{ dan } J\frac{a}{x} \models \varphi \\
&\iff \text{voor alle } a \in A,\ \text{als } \mathfrak{I}\frac{a}{x}(x) = \mathfrak{I}\frac{a}{x}(t) \text{ dan } J\frac{a}{x} \models \varphi \\
&\iff \text{voor alle } a \in A,\ \text{als } a = \mathfrak{I}(t) \text{ dan } \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi \\
&\iff \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t)}{x} \models \varphi \\
&\iff \mathfrak{I} \models \varphi\frac{t}{x}
\end{aligned}
$$

In de laatste stap gebruikten we het Substitutielemma (8.3).

Opgave 3

(a) Laat zien dat $<$ definieerbaar is in $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0)$
(b) Laat zien dat $<$ niet definieerbaar is in $(\mathbb{R}, +, 0)$.

(a) Definieer

$$\varphi[a, b] = \exists c\, (b \equiv a + c \cdot c)\,.$$

Dit betekent dat precies dat $a < b$.

(b) Bekijk het automorfisme $\pi(x) = -x$. Stel dat $<$ definieerbaar is in $(\mathbb{R}, +, 0)$, dan moet het behouden worden onder dit automorfisme. Er geldt echter $2 < 3$, maar $-2 > -3$ en dit is een tegenspraak.

De crux is dat deze φ *geen* homomorfisme is ten opzichte van vermenigvuldiging.

Opgave 4

Zij $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ twee S-structuren en zij β een bedeling in $\mathfrak{A}$. Dan geldt voor elke S-term $(\mathfrak{A}, \beta)(t) = (\mathfrak{B}, \beta)(t)$ en voor elke kwantorvrije φ geldt $(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi \iff (\mathfrak{B}, \beta) \models \varphi$.

We doen inductie naar de complexiteit van t.

- variabele: We hebben $(\mathfrak{A}, \beta)(t) = \beta(x) = (\mathfrak{B}, \beta)(t)$.
- constante: We hebben $(\mathfrak{A}, \beta)(t) = \mathfrak{a}(c) = (\mathfrak{B}, \beta)(t)$.
- functie: We hebben $(\mathfrak{A}, \beta)(t) = f^{\mathfrak{A}}((\mathfrak{A}, \beta)(t_1), \ldots, (\mathfrak{A}, \beta)(t_n)) = f^{\mathfrak{B}}((\mathfrak{B}, \beta)(t_1), \ldots, (\mathfrak{B}, \beta)(t_n))$ met de inductiehypothese. Deze laatste uitdrukking is gelijk aan $(\mathfrak{B}, \beta)(t)$.

Het tweede stuk is te bewijzen op dezelfde manier als het isomorfismelemma (5.2). Gebruik hierbij alleen de eerste drie delen.

Opgave 5

(a) De structuur $(A, \sigma^A, 0^A)$ voldoet aan de axioma's van Peano.
(b) $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ is bepaald door Π tot op isomorfismen.

Zij $\mathfrak{A} = (A, +^A, \cdot^A, 0^A, 1^A)$ een model van Π. De eerste drie formules uit Π geven precies (P1), (P2) en (P3) respectievelijk. We willen aantonen dat er een isomorfisme $\pi\colon \mathfrak{N} \cong \mathfrak{A}$ bestaat. We definiëren π inductief:

- $\pi(0) = 0^A$
- $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n))$

We weten al dat dit een isomorfisme $(\mathbb{N}, +, 0) \cong (A, +^A, 0^A)$ is (Dedekinds stelling; blz. 50), maar we moeten nog controleren dat het ook $\cdot$ behoudt.

We definiëren $\pi\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{A}$ door $\pi(0) = 0^A$ en $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n))$.

Claim

Er geldt $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$ voor alle $m, n \in \mathbb{N}$.

We bewijzen dit met inductie naar m.

- Als $m = 0$ dan hebben we $\pi(n \cdot 0) = \pi(0) = 0^A = \pi(n) \cdot^A \pi(0)$. We gebruiken hier de zesde formule [Π6].
- Stel dat het klopt voor een zekere m. Voor $m+1$ geldt dan

$$\begin{aligned}\pi(n \cdot (m+1)) &= \pi(nm + n) = \pi(nm) +^A \pi(n) \\ &\overset{\text{IH}}{=} \pi(n) \cdot^A \pi(m) +^A \pi(n) \overset{[\Pi 7]}{=} \pi(n) \cdot^A (\pi(m) +^A 1^A) \\ &= \pi(n) \cdot^A \sigma^A(\pi(m)) = \pi(n) \cdot^A \pi(m+1).\end{aligned}$$

Dit bewijst dat π een isomorfisme is.