Wiskunde logica

Werkcollege 5

Jolien Oomens

10 maart 2017

Opgave 1

(a) De structuur $(A, \sigma^A, 0^A)$ voldoet aan de axioma's van Peano.
(b) $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ is bepaald door Π tot op isomorfismen.

Opgave 1

(a) De structuur $(A, \sigma^A, 0^A)$ voldoet aan de axioma's van Peano.
(b) $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ is bepaald door Π tot op isomorfismen.

Zij $\mathfrak{A} = (A, +^A, \cdot^A, 0^A, 1^A)$ een model van Π.

Opgave 1

(a) De structuur $(A, \sigma^A, 0^A)$ voldoet aan de axioma's van Peano.
(b) $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ is bepaald door Π tot op isomorfismen.

Zij $\mathfrak{A} = (A, +^A, \cdot^A, 0^A, 1^A)$ een model van Π. De eerste drie formules uit Π geven precies (P1), (P2) en (P3) respectievelijk.

Opgave 1

(a) De structuur $(A, \sigma^A, 0^A)$ voldoet aan de axioma's van Peano.
(b) $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ is bepaald door Π tot op isomorfismen.

Zij $\mathfrak{A} = (A, +^A, \cdot^A, 0^A, 1^A)$ een model van Π. De eerste drie formules uit Π geven precies (P1), (P2) en (P3) respectievelijk. We willen aantonen dat er een isomorfisme $\pi\colon \mathfrak{N} \cong \mathfrak{A}$ bestaat.

Opgave 1

(a) De structuur $(A, \sigma^A, 0^A)$ voldoet aan de axioma's van Peano.
(b) $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ is bepaald door Π tot op isomorfismen.

Zij $\mathfrak{A} = (A, +^A, \cdot^A, 0^A, 1^A)$ een model van Π. De eerste drie formules uit Π geven precies (P1), (P2) en (P3) respectievelijk. We willen aantonen dat er een isomorfisme $\pi\colon \mathfrak{N} \cong \mathfrak{A}$ bestaat. We definiëren π inductief:

Opgave 1

(a) De structuur $(A, \sigma^A, 0^A)$ voldoet aan de axioma's van Peano.
(b) $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ is bepaald door Π tot op isomorfismen.

Zij $\mathfrak{A} = (A, +^A, \cdot^A, 0^A, 1^A)$ een model van Π. De eerste drie formules uit Π geven precies (P1), (P2) en (P3) respectievelijk. We willen aantonen dat er een isomorfisme $\pi \colon \mathfrak{N} \cong \mathfrak{A}$ bestaat. We definiëren π inductief:

- $\pi(0) = 0^A$

Opgave 1

(a) De structuur $(A, \sigma^A, 0^A)$ voldoet aan de axioma's van Peano.
(b) $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ is bepaald door Π tot op isomorfismen.

Zij $\mathfrak{A} = (A, +^A, \cdot^A, 0^A, 1^A)$ een model van Π. De eerste drie formules uit Π geven precies (P1), (P2) en (P3) respectievelijk. We willen aantonen dat er een isomorfisme $\pi \colon \mathfrak{N} \cong \mathfrak{A}$ bestaat. We definiëren π inductief:

- $\pi(0) = 0^A$
- $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n))$

Opgave 1

(a) De structuur $(A, \sigma^A, 0^A)$ voldoet aan de axioma's van Peano.
(b) $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ is bepaald door Π tot op isomorfismen.

Zij $\mathfrak{A} = (A, +^A, \cdot^A, 0^A, 1^A)$ een model van Π. De eerste drie formules uit Π geven precies (P1), (P2) en (P3) respectievelijk. We willen aantonen dat er een isomorfisme $\pi\colon \mathfrak{N} \cong \mathfrak{A}$ bestaat. We definiëren π inductief:

- $\pi(0) = 0^A$
- $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n))$

We weten al dat dit een isomorfisme is voor de opvolgfunctie (Dedekinds stelling; blz. 50),

Opgave 1

(a) De structuur $(A, \sigma^A, 0^A)$ voldoet aan de axioma's van Peano.
(b) $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ is bepaald door Π tot op isomorfismen.

Zij $\mathfrak{A} = (A, +^A, \cdot^A, 0^A, 1^A)$ een model van Π. De eerste drie formules uit Π geven precies (P1), (P2) en (P3) respectievelijk. We willen aantonen dat er een isomorfisme $\pi\colon \mathfrak{N} \cong \mathfrak{A}$ bestaat. We definiëren π inductief:

- $\pi(0) = 0^A$
- $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n))$

We weten al dat dit een isomorfisme is voor de opvolgfunctie (Dedekinds stelling; blz. 50), maar we moeten nog controleren dat het ook $+$ en $\cdot$ behoudt.

We definiëren $\pi\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{A}$ door $\pi(0) = 0^A$ en $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n))$.

Claim

Er geldt $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$ voor alle $m, n \in \mathbb{N}$.

We definiëren $\pi\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{A}$ door $\pi(0) = 0^A$ en $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n))$.

Claim

Er geldt $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$ voor alle $m, n \in \mathbb{N}$.

We bewijzen dit met inductie naar m.

We definiëren $\pi\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{A}$ door $\pi(0) = 0^A$ en $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n))$.

Claim

Er geldt $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$ voor alle $m, n \in \mathbb{N}$.

We bewijzen dit met inductie naar m.

- Als $m = 0$ dan hebben we
  $\pi(n \cdot 0)$

We definiëren $\pi\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{A}$ door $\pi(0) = 0^A$ en $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n))$.

Claim

Er geldt $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$ voor alle $m, n \in \mathbb{N}$.

We bewijzen dit met inductie naar m.

- Als $m = 0$ dan hebben we
  $\pi(n \cdot 0) = \pi(0)$

We definiëren $\pi\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{A}$ door $\pi(0) = 0^A$ en $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n))$.

Claim

Er geldt $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$ voor alle $m, n \in \mathbb{N}$.

We bewijzen dit met inductie naar m.

- Als $m = 0$ dan hebben we
  $\pi(n \cdot 0) = \pi(0) = 0^A$

We definiëren $\pi\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{A}$ door $\pi(0) = 0^A$ en $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n))$.

Claim

Er geldt $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$ voor alle $m, n \in \mathbb{N}$.

We bewijzen dit met inductie naar m.

- Als $m = 0$ dan hebben we
  $\pi(n \cdot 0) = \pi(0) = 0^A = \pi(n) \cdot^A \pi(0)$

We definiëren $\pi\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{A}$ door $\pi(0) = 0^A$ en $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n))$.

Claim

Er geldt $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$ voor alle $m, n \in \mathbb{N}$.

We bewijzen dit met inductie naar m.

- Als $m = 0$ dan hebben we $\pi(n \cdot 0) = \pi(0) = 0^A = \pi(n) \cdot^A \pi(0)$. We gebruiken hier de zesde formule [Π6].

We definiëren $\pi : \mathfrak{N} \to \mathfrak{A}$ door $\pi(0) = 0^A$ en $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n))$.

Claim

Er geldt $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$ voor alle $m, n \in \mathbb{N}$.

We bewijzen dit met inductie naar m.

- Als $m = 0$ dan hebben we $\pi(n \cdot 0) = \pi(0) = 0^A = \pi(n) \cdot^A \pi(0)$. We gebruiken hier de zesde formule [Π6].
- Stel dat het klopt voor een zekere m. Voor $m+1$ geldt dan

$$\pi(n \cdot (m+1))$$

We definiëren $\pi\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{A}$ door $\pi(0) = 0^A$ en $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n))$.

Claim

Er geldt $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$ voor alle $m, n \in \mathbb{N}$.

We bewijzen dit met inductie naar m.

- Als $m = 0$ dan hebben we $\pi(n \cdot 0) = \pi(0) = 0^A = \pi(n) \cdot^A \pi(0)$. We gebruiken hier de zesde formule [Π6].
- Stel dat het klopt voor een zekere m. Voor $m+1$ geldt dan

$$\pi(n \cdot (m+1)) = \pi(nm + n)$$

We definiëren $\pi\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{A}$ door $\pi(0) = 0^A$ en $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n))$.

Claim

Er geldt $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$ voor alle $m, n \in \mathbb{N}$.

We bewijzen dit met inductie naar m.

- Als $m = 0$ dan hebben we $\pi(n \cdot 0) = \pi(0) = 0^A = \pi(n) \cdot^A \pi(0)$. We gebruiken hier de zesde formule [Π6].
- Stel dat het klopt voor een zekere m. Voor $m+1$ geldt dan

$$\pi(n \cdot (m+1)) = \pi(nm + n) = \pi(nm) +^A \pi(n)$$

We definiëren $\pi \colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{A}$ door $\pi(0) = 0^A$ en $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n))$.

Claim

Er geldt $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$ voor alle $m, n \in \mathbb{N}$.

We bewijzen dit met inductie naar m.

- Als $m = 0$ dan hebben we $\pi(n \cdot 0) = \pi(0) = 0^A = \pi(n) \cdot^A \pi(0)$. We gebruiken hier de zesde formule [Π6].
- Stel dat het klopt voor een zekere m. Voor $m + 1$ geldt dan

$$\begin{aligned} \pi(n \cdot (m+1)) &= \pi(nm + n) = \pi(nm) +^A \pi(n) \\ &\overset{\text{IH}}{=} \pi(n) \cdot^A \pi(m) +^A \pi(n) \end{aligned}$$

We definiëren $\pi\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{A}$ door $\pi(0) = 0^A$ en $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n))$.

Claim

Er geldt $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$ voor alle $m, n \in \mathbb{N}$.

We bewijzen dit met inductie naar m.

- Als $m = 0$ dan hebben we $\pi(n \cdot 0) = \pi(0) = 0^A = \pi(n) \cdot^A \pi(0)$. We gebruiken hier de zesde formule [Π6].
- Stel dat het klopt voor een zekere m. Voor $m+1$ geldt dan

$$\pi(n \cdot (m+1)) = \pi(nm + n) = \pi(nm) +^A \pi(n)$$
$$\stackrel{\text{IH}}{=} \pi(n) \cdot^A \pi(m) +^A \pi(n) \stackrel{[\Pi 7]}{=} \pi(n) \cdot^A (\pi(m) +^A 1^A)$$

We definiëren $\pi\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{A}$ door $\pi(0) = 0^A$ en $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n))$.

Claim

Er geldt $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$ voor alle $m, n \in \mathbb{N}$.

We bewijzen dit met inductie naar m.

- Als $m = 0$ dan hebben we $\pi(n \cdot 0) = \pi(0) = 0^A = \pi(n) \cdot^A \pi(0)$. We gebruiken hier de zesde formule [Π6].
- Stel dat het klopt voor een zekere m. Voor $m + 1$ geldt dan

$$\begin{aligned}\pi(n \cdot (m+1)) &= \pi(nm + n) = \pi(nm) +^A \pi(n) \\ &\overset{\mathrm{IH}}{=} \pi(n) \cdot^A \pi(m) +^A \pi(n) \overset{[\Pi 7]}{=} \pi(n) \cdot^A (\pi(m) +^A 1^A) \\ &= \pi(n) \cdot^A \sigma^A(\pi(m))\end{aligned}$$

We definiëren $\pi\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{A}$ door $\pi(0) = 0^A$ en $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n))$.

Claim

Er geldt $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$ voor alle $m, n \in \mathbb{N}$.

We bewijzen dit met inductie naar m.

- Als $m = 0$ dan hebben we $\pi(n \cdot 0) = \pi(0) = 0^A = \pi(n) \cdot^A \pi(0)$. We gebruiken hier de zesde formule [Π6].
- Stel dat het klopt voor een zekere m. Voor $m+1$ geldt dan

$$\begin{aligned}\pi(n \cdot (m+1)) &= \pi(nm + n) = \pi(nm) +^A \pi(n) \\ &\overset{\text{IH}}{=} \pi(n) \cdot^A \pi(m) +^A \pi(n) \overset{[\Pi 7]}{=} \pi(n) \cdot^A (\pi(m) +^A 1^A) \\ &= \pi(n) \cdot^A \sigma^A(\pi(m)) = \pi(n) \cdot^A \pi(m+1).\end{aligned}$$

We definiëren $\pi\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{A}$ door $\pi(0) = 0^A$ en $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n))$.

Claim

Er geldt $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$ voor alle $m, n \in \mathbb{N}$.

We bewijzen dit met inductie naar m.

- Als $m = 0$ dan hebben we $\pi(n \cdot 0) = \pi(0) = 0^A = \pi(n) \cdot^A \pi(0)$. We gebruiken hier de zesde formule [$\Pi 6$].
- Stel dat het klopt voor een zekere m. Voor $m+1$ geldt dan

$$\begin{aligned}\pi(n \cdot (m+1)) &= \pi(nm + n) = \pi(nm) +^A \pi(n) \\ &\overset{\text{IH}}{=} \pi(n) \cdot^A \pi(m) +^A \pi(n) \overset{[\Pi 7]}{=} \pi(n) \cdot^A (\pi(m) +^A 1^A) \\ &= \pi(n) \cdot^A \sigma^A(\pi(m)) = \pi(n) \cdot^A \pi(m+1).\end{aligned}$$

Dit bewijst dat π een isomorfisme is ten opzichte van $\cdot$.

We definiëren $\pi\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{A}$ door $\pi(0) = 0^A$ en $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n))$.

Claim

Er geldt $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$ voor alle $m, n \in \mathbb{N}$.

We bewijzen dit met inductie naar m.

- Als $m = 0$ dan hebben we $\pi(n \cdot 0) = \pi(0) = 0^A = \pi(n) \cdot^A \pi(0)$. We gebruiken hier de zesde formule [Π6].
- Stel dat het klopt voor een zekere m. Voor $m+1$ geldt dan

$$\begin{aligned}\pi(n \cdot (m+1)) &= \pi(nm + n) = \pi(nm) +^A \pi(n) \\ &\overset{\text{IH}}{=} \pi(n) \cdot^A \pi(m) +^A \pi(n) \overset{[\Pi 7]}{=} \pi(n) \cdot^A (\pi(m) +^A 1^A) \\ &= \pi(n) \cdot^A \sigma^A(\pi(m)) = \pi(n) \cdot^A \pi(m+1).\end{aligned}$$

Dit bewijst dat π een isomorfisme is ten opzichte van $\cdot$. Bewijs nu hetzelfde voor $+$.

Opgave 3

Laat zien dat de regel $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \forall x \psi}$ incorrect is.

Opgave 3

Laat zien dat de regel $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \forall x \psi}$ incorrect is.

Neem $\Gamma = \varnothing$ en $\varphi = \psi = Rxx$.

Opgave 3

Laat zien dat de regel $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \forall x \psi}$ incorrect is.

Neem $\Gamma = \emptyset$ en $\varphi = \psi = Rxx$. Dan is een model met twee punten waarvan er maar 1 reflexief is een tegenvoorbeeld.

Opgave 3

Laat zien dat de regel $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \forall x \psi}$ incorrect is.

Neem $\Gamma = \emptyset$ en $\varphi = \psi = Rxx$. Dan is een model met twee punten waarvan er maar 1 reflexief is een tegenvoorbeeld.

Als we aannemen dat $x \notin \operatorname{var} \psi$ dan is de regel duidelijk correct.

Opgave 5

(a) Laat zien dat $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}$ en (b) dat $\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi}$.

Opgave 5

(a) Laat zien dat $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}$ en (b) dat $\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi}$.

(a) Een mogelijk bewijs is

$$\begin{aligned} &\Gamma \vdash \varphi && \text{(Premisse)} \\ &\Gamma \vdash \neg\varphi \vee \neg\neg\varphi && \text{(Tertium non datur)} \\ &\Gamma \vdash \neg\neg\varphi && \text{(Modus ponens).} \end{aligned}$$

Opgave 5

(a) Laat zien dat $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}$ en (b) dat $\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi}$.

(a) Een mogelijk bewijs is

$$\begin{array}{lr} \Gamma \vdash \varphi & \text{(Premisse)} \\ \Gamma \vdash \neg\varphi \vee \neg\neg\varphi & \text{(Tertium non datur)} \\ \Gamma \vdash \neg\neg\varphi & \text{(Modus ponens).} \end{array}$$

(b) Een mogelijk bewijs is

$$\begin{array}{rr} \Gamma \vdash \neg\neg\varphi & \text{(Premisse)} \\ \Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi & \text{(Antecedent)} \\ \Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\varphi & \text{(Aanname)} \\ \Gamma \vdash \varphi & \text{(Contradictie).} \end{array}$$

Opgave 5(c)

Laat zien dat $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\exists x \varphi \vdash \exists x \psi}$.

Opgave 5(c)

Laat zien dat $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\exists x\varphi \vdash \exists x\psi}$.

Een mogelijk bewijs is

$$\begin{aligned} \varphi &\vdash \psi && \text{(Premisse)} \\ \varphi &\vdash \exists x\psi && (\exists\text{S}) \\ \exists x\varphi &\vdash \exists x\psi && (\exists\text{A}), \end{aligned}$$

Opgave 5(c)

Laat zien dat $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\exists x\varphi \vdash \exists x\psi}$.

Een mogelijk bewijs is

$$\begin{aligned} \varphi &\vdash \psi && \text{(Premisse)} \\ \varphi &\vdash \exists x\psi && (\exists\text{S}) \\ \exists x\varphi &\vdash \exists x\psi && (\exists\text{A}), \end{aligned}$$

waar we bij ($\exists$A) gebruikten dat x niet vrij is in $\exists x\varphi$ en $\exists x\psi$.

Opgave 5(d)

Laat zien dat $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi, \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$.

Opgave 5(d)

Laat zien dat $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi, \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$.

Herinner je dat $\varphi \to \psi := \neg\varphi \vee \psi$.

Opgave 5(d)

Laat zien dat $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi, \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$.

Herinner je dat $\varphi \to \psi := \neg\varphi \vee \psi$. We hebben

$$
\begin{aligned}
\Gamma &\vdash \neg\varphi \vee \psi && \text{(Premisse)}\\
\Gamma &\vdash \varphi && \text{(Premisse)}\\
\Gamma, \psi &\vdash \psi && \text{(Aanname)}\\
\Gamma, \neg\varphi &\vdash \neg\varphi && \text{(Aanname)}\\
\Gamma, \neg\varphi &\vdash \varphi && \text{(Antecedent)}\\
\Gamma, \neg\varphi &\vdash \psi && \text{(Contradictie')}\\
\Gamma, (\neg\varphi \vee \psi) &\vdash \psi && (\vee\text{A})\\
\Gamma &\vdash \psi && \text{(Kettingregel).}
\end{aligned}
$$

Opgave 5(e)

Laat zien dat $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi^{y}_{x}}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$ als y niet vrij is in Γ en in $\forall x \varphi$.

Opgave 5(e)

Laat zien dat $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi^y_x}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$ als y niet vrij is in Γ en in $\forall x \varphi$.

Herinner je dat $\forall x \varphi := \neg \exists x \neg \varphi$.

Opgave 5(e)

Laat zien dat $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \vdash \forall x\varphi}$ als y niet vrij is in Γ en in $\forall x\varphi$.

Herinner je dat $\forall x\varphi := \neg\exists x\neg\varphi$. Een bewijs is

$$
\begin{array}{rr}
\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x} & \text{(Premisse)} \\
\Gamma, \neg\varphi\frac{y}{x} \vdash \neg\varphi\frac{y}{x} & \text{(Aanname)} \\
\Gamma, \exists x\neg\varphi \vdash \neg\varphi\frac{y}{x} & (\exists\text{A}) \\
\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \neg\exists x\neg\varphi & \text{(Contrapositie D)} \\
\Gamma \vdash \neg\exists x\neg\varphi & \text{(Kettingregel).}
\end{array}
$$

Opgave 5(e)

Laat zien dat $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi^y_x}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$ als y niet vrij is in Γ en in $\forall x \varphi$.

Herinner je dat $\forall x \varphi := \neg \exists x \neg \varphi$. Een bewijs is

$$\begin{array}{rr}
\Gamma \vdash \varphi^y_x & \text{(Premisse)} \\
\Gamma, \neg\varphi^y_x \vdash \neg\varphi^y_x & \text{(Aanname)} \\
\Gamma, \exists x \neg\varphi \vdash \neg\varphi^y_x & (\exists\text{A}) \\
\Gamma, \varphi^y_x \vdash \neg\exists x \neg\varphi & \text{(Contrapositie D)} \\
\Gamma \vdash \neg\exists x \neg\varphi & \text{(Kettingregel).}
\end{array}$$

Controleer zelf dat we inderdaad de regel ($\exists$A) mochten toepassen.